PCT, СПИН И СТАТИСТИКА И ВСЁ ТАКОЕ

Р. СТРИТЕР
А. ВАЙТМАН

MATHEMATICAL PHYSICS
MONOGRAPH SERIES

PCT,
SPIN AND STATISTICS AND ALL THAT

R. F. STREATER
Imperial College of Science
and Technology

A. S. WIGHTMAN
Princeton University

W. A. BENJAMIN, INC
NEW YORK — AMSTERDAM
1964

Р. СТРИТЕР, А. С. ВАЙТМАН

PCT,

СПИН И СТАТИСТИКА И ВСЁ ТАКОЕ

Перевод с английского
Б. М. СТЕПАНОВА и А. Д. СУХАНОВА

Под редакцией
М. К. ПОЛИВАНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

530.1
С 85
УДК 539.101

АННОТАЦИЯ

За последние годы в теории квантованных полей усилилась тенденция к аксиоматическому пути построения теории, к повышенным требованиям к доказательной силе построений. Данная книга известных физиков-теоретиков, вышедшая в США, содержит тщательно продуманное изложение основ современной квантовой теории поля.

Внимательно отобранный материал, блестящее изложение делают эту книгу интересной для широкого круга научных работников, аспирантов и студентов — физиков и математиков.

2-3-2
141-66

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Стритер и Вайтман скрыли истинное название своей книги. Они предпочли отшутиться, но на самом деле их книга должна называться «Пролегомены ко всякой будущей теории поля».

После того как десять лет назад было завершено построение релятивистски инвариантной теории возмущений и теории перенормировок, что позволило создать последовательную теорию квантовой электродинамики, целиком основанную на теории возмущений, оправданной малостью постоянной тонкой структуры (1/137), во всем мире ведутся интенсивные исследования и поиски общей структуры квантовой теории поля.

Задача создания последовательной теории элементарных точечных взаимодействий уходит своими корнями еще в классическую физику.

Те самые задачи, которые подвели Лоренца, Планка, Эйнштейна и Бора к созданию квантовой механики и релятивистской теории, для своего полного и последовательного разрешения требуют понимания процессов испускания и поглощения излучения, а эти процессы должны описываться в рамках квантовой теории поля.

Всем известны три кита, на которых должна покоиться эта теория: релятивистские законы преобразования, квантовомеханический операторный язык, взаимные переходы частиц — их рождение и уничтожение в элементарном акте взаимодействия.

Сперва казалось, что путем некоторых усовершенствований квантовомеханического аппарата его можно приспособить для описания релятивистских процессов, в которых рождаются и уничтожаются частицы. Первые успехи всех ободрили, и смелые действия, основанные на аналогии, привели к тому, что было создано множество теорий, в логической непротиворечивости которых есть все основания сомневаться.

Когда пришло время подумать, то оказалось, что в самих основах теории есть множество совершенно неясных моментов. Потребовались новые математические методы: физикам пришлось усвоить правила обращения с обобщенными функциями, отдать себе отчет в том, что они работают с неограниченными операторами, открыть, что физические требования приводят к важным свойствам голоморфности некоторых привычных функций и что из этого в свою очередь можно извлечь некоторую несомненную физическую информацию.

В результате в последние несколько лет в теории квантовых полей выработался новый стандарт необходимых математических знаний и повышенных требований к доказательной силе построений.

Никто не может сказать, достаточно ли только отточить таким образом свое оружие для того, чтобы преуспеть в поисках эффективной и последовательной квантовой теории поля.

Скорей всего недостаточно, и потребуются какие-то новые физические факты, какие-то новые идеи для того, чтобы получился этот сложный пасьянс или чтоб можно было как-то обойти — хоть этого и не хочется делать — логические головоломки, встающие на пути увязки квантовомеханических и релятивистских требований. Но ясно одно, что исследования в этой области должны вестись на высоте этого нового стандарта.

Книжка Вайтмана и Стритера содержит очень сжатое и обдуманное изложение «небольшого числа запоминающихся фактов», внимательно отобранных и блестяще изложенных на том новом языке, который должны усвоить все занимающиеся квантовой теорией поля.

Мы надеемся, что читатели оценят абсолютно реальную необходимость разобраться в тех непростых вещах, которые в ней изложены.

Серпухов 1.IV.66

М. К. Поливанов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Идея этой книги возникла в разговоре с Г. А. Бете, заметившим, что небольшая книга по современной теории поля, содержащая лишь Запоминающиеся Результаты, была бы Хорошей Вещью. В области исторического исследования этот подход привел к публикации трактата (W. C. Sellar and R. J. Yeatman, 1066 and All That, Dutton, New York, 1931), который стал стандартным текстом для всех, кто всерьез занимается наукой. Хотя часто оказывается, что перенесение испытанных и оправдавших себя методов из одной области исследования в другую опасно, применение принципов этой книги к физике привело по меньшей мере к одному хорошему результату: мы исключили все теоремы, доказательства которых не существуют.

Р. Ф. Стритер
А. С. Вайтман

Ноябрь 1963

ВВЕДЕНИЕ

В начале, когда Дирак, Иордан, Гейзенберг и Паули создавали квантовую теорию полей, никто не считал, что она должна дать последовательное описание Природы. В конце концов, это была лишь квантованная версия классической теории Максвелла и Лоренца, теории, пороки и трудности которой, связанные с бесконечной электромагнитной инерцией точечных частиц, были хорошо известны.

Многие физики придерживались мнения, что любая попытка сделать математические основы этой теории более строгими была бы неразумной; прежде всего следовало бы установить правильные классические основы. А такие модификации могли бы настолько сильно изменить самые основы теории, что математически строгое обсуждение любой предварительной версии оказалось бы совершенно не относящимся к делу. Позднее было высказано предположение, что беда в том, что теория слишком скромна; она не берется предсказывать массы элементарных частиц или значения констант связи, и ее следует фундаментально изменить, имея в виду эти задачи.

Однако попытки выйти за пределы теории шли ко дну снова и снова. Какие бы успехи ни достигались, они были либо феноменологическими, либо были связаны с систематическим развитием первоначального формализма. Но квантовая теория полей никогда не достигала той стадии, когда можно было бы сказать с уверенностью, что она свободна от внутренних противоречий, в равной мере нельзя было утверждать обратного. В действительности оказалось, что Главная Проблема всей квантовой теории поля в том, убить ее или исцелить: показать, что идеализации, содержащиеся в фундаментальных представлениях теории (релятивистская инвариантность, квантовая механика, локальные поля и т. д.), в каком-то смысле

несовместимы, или перелить заново теорию в такую форму, чтобы она давала практический язык для описания динамики элементарных частиц.

В последние десять лет было сделано много попыток атаковать эту ситуацию в лоб. (Физиков, занятых работой этого рода, иногда награждают именем Feldverein. Циничные наблюдатели сравнивают их с трясунами, религиозной сектой в Новой Англии, члены которой строят прочные амбары и ведут безбрачную жизнь — житейский эквивалент научной работы, ограничивающейся строгими доказательствами теорем и никогда не доходящей до вычисления эффективных сечений.) Эти усилия пока еще не решили Главной Проблемы, но они породили целый ряд побочных результатов, которые привели к очень глубокому пониманию общей структуры теории поля. Настоящая книга посвящена изложению некоторых из этих общих результатов, тех физических идей, которые они воплощают, и той математики, которая необходима для их доказательства.

Мы включили в нашу книгу лишь те результаты, которые имеют более или менее законченный характер. В частности, по этой причине мы опустили описание попыток установить связь с важной работой Лемана, Симанзика и Циммермана и другими работами о хронологически упорядоченных и запаздывающих функциях и о их связи с теорией столкновений. Потребуется еще очень много работы, прежде чем можно будет правильно понять эти вопросы на надежном и строгом основании. Хотя связь с Леманом, Симанзиком и Циммерманом еще надежно не установлена, Д. Рюэль построил строгую теорию столкновений (основанную на аксиомах главы 3 настоящей книги), следуя идеям, намеченным Р. Хаагом. Мы не включили этой теории в нашу книжку; но этот недостаток будет восполнен, как только станет доступна прекрасная книга Р. Йоста *), в которой содержится полное изложение этих вопросов. (The General Theory of Quantized Fields, American Mathematical Society, 1963.)

Глава 1 содержит сводку трансформационных свойств физических состояний в релятивистской квантовой меха-

*) Готовится русский перевод в издательстве «Мир». (*Прим. перев.*)

нике. Мы предполагаем, что читатель знаком с введением в теорию гильбертова пространства и ее применением к описанию состояний в квантовой механике. Может быть, стоит сказать для более молодых читателей, что простота трансформационных свойств физического вакуума и одночастичных состояний при преобразованиях Лоренца, хорошо известная сегодня, в квантовой теории поля пятидесятых годов была погребена под кучей кухонных отбросов трудного и неоднозначного формализма. Задача главы 1 — дать язык, на котором физические состояния с простыми трансформационными свойствами имеют простое описание. Так, например, нет никакой нужды в концепциях голой массы и голого вакуума, и они здесь не вводятся.

Глава 2 представляет собой изложение математического аппарата, используемого в дальнейшем. Технические детали некоторых доказательств опущены, но мы постарались широко ознакомить читателя с основными математическими идеями. Теоремы формулируются точно. Изложение не предполагает у читателя знакомства с чем-либо сверх того, с чем сталкивается любой студент-физик на старших курсах.

В главе 3 определяется понятие поля в том виде, как оно используется в этой книге. Показано, что теория поля определяется вакуумными средними произведений полевых операторов. Хотя эта глава, по существу, содержит все необходимое для понимания, тем не менее может оказаться полезным самое поверхностное знакомство с элементарной квантовой теорией поля, скажем, на уровне второй части книги С. Швебера *).

В главе 4 материал трех подготовительных глав применяется для получения некоторых общих теорем квантовой теории поля, из которых PCT-теорема и теорема о связи спина со статистикой наиболее известны.

Читатель, желающий приступить непосредственно к систематическому обсуждению квантовой теории поля,

---

*) S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper and Row, New York, 1961. (Есть русский перевод: С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.)

может начинать прямо с главы 3 и возвращаться к главам 1 и 2, лишь если он сочтет необходимым восполнить детали.

Каждая глава снабжена библиографией, указывающей читателю относящуюся к ней литературу. Авторы не стремились к полноте. Обозначения стандартные: теорема 3-1 означает первую теорему главы 3 и аналогично в случае уравнений. Для обозначения конца доказательства используется знак Халмоша ▮.

Глава 1

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЗАКОНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

You point out that care is needed in the analysis of the representations of the Lorentz group; I promise you that I will be careful.

E. Wigner *)

Повсюду в этой книге для описания состояний применяется гейзенбергова картина квантовой механики. Картина Шредингера намного менее подходяща для описания релятивистской теории, так как в ней временнàя координата входит на совершенно другом основании, чем пространственные координаты; как будет показано в главе 4, другая обычно используемая картина, картина взаимодействия, вообще не существует. В картине Гейзенберга каждому состоянию рассматриваемой системы соответствует единичный вектор, скажем Ф, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Вектор не изменяется со временем, тогда как наблюдаемые, изображаемые эрмитовыми линейными операторами, действующими на $\mathcal{H}$, в общем случае изменяются. Скалярное произведение двух векторов Ф и Ψ в $\mathcal{H}$ обозначается через (Ф, Ψ) и называется *амплитудой перехода* соответствующих состояний.

Два вектора, отличающихся только умножением на комплексное число модуля единица, описывают одно и то же состояние, потому что результаты любых экспериментов над состоянием, описываемым с помощью Ψ, могут быть выражены в терминах величин

$$|(\Phi, \Psi)|^2,$$

которые дадут вероятность обнаружить Ф, если Ψ задано. Множество Ф векторов $e^{i\alpha}\Phi$, где α пробегает все вещест-

---

*) Вы говорите мне, что при анализе представлений группы Лоренца необходима осторожность; я обещаю вам, что буду осторожен.

Е. Вигнер

венные числа, а норма Ф (обозначается через $\|\Phi\|$ и определяется как $[(\Phi, \Phi)]^{1/2}$) равна единице, называется *единичным лучом*. Для краткости мы будем говорить о состоянии Ф. Условие $\|\Phi\| = 1$, очевидно, эквивалентно условию нормировки вероятности на единицу. Предыдущие замечания можно подытожить: *состояния* *) *физической системы изображаются единичными лучами.*

1-1. ПРАВИЛА СУПЕРОТБОРА

Предположим, что лучи, описывающие состояния физической системы, лежат в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Будет ли любой единичный луч в $\mathscr{H}$ описывать возможное состояние системы? В общем случае ответ должен быть отрицательным. Например, никому не удавалось создать состояние, которое было бы суперпозицией состояний с различными зарядами Q, и считается, что их не бывает в Природе. По-видимому, также любое *физически реализуемое* состояние должно быть собственным состоянием оператора B, барионного числа, и $(-1)^F$, где F — четное число для состояний с целым спином и нечетное число для состояний с полуцелым спином.

Операторы Q, B и $(-1)^F$ сохраняются во времени, но эти законы сохранения надо отличать от обычных законов сохранения, таких как, скажем, закон сохранения x-компоненты момента J_x. Действительно существуют физически реализуемые состояния, не являющиеся собственными состояниями J_x, например состояния с определенным значением z-компоненты момента J_z.

Оператор $(-1)^F$ возникает благодаря инвариантности результатов эксперимента относительно поворотов на угол 2π вокруг любой оси. Если ψ_1 — состояние полуцелого спина, а ψ_2 — целого, то поворот на угол 2π переведет $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ в $-\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$. Оба они как физически неразли-

---

*) Под «состоянием» мы всегда будем подразумевать чистое состояние. «Смешанное состояние» всегда можно образовать из нескольких состояний с помощью *классической* суперпозиции, причем каждое входит с некоторой известной вероятностью, которая описывает наше незнание системы.

чимые должны принадлежать одному и тому же лучу, что возможно лишь, если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$.

Любое утверждение, которое выделяет некоторые единичные лучи как физически нереализуемые, называется *правилом суперотбора.* Если в теории имеются правила суперотбора, то не любой эрмитов оператор является наблюдаемым и принцип суперпозиции не имеет места в $\mathscr{H}$. Однако если Q, B и $(-1)^F$ определяют единственные правила суперотбора, то мы можем образовать линейную комбинацию любых двух состояний с одинаковыми значениями Q, B и $(-1)^F$ и получим физическое состояние. Принцип суперпозиции тогда справедлив без ограничений в любом подпространстве из $\mathscr{H}$ состояний, принадлежащих заданным собственным значениям операторов Q, B и $(-1)^F$.

Правила суперотбора, сопоставляемые Q, B и $(-1)^F$, называются правилами суперотбора соответственно по ***заряду***, ***барионному числу*** и ***унивалентности.***

Чтобы систематически изучить правила суперотбора в общей теории, рассматривают множество θ всех наблюдаемых какой-либо системы. Каждая наблюдаемая определяет эрмитов оператор в $\mathscr{H}$, не обязательно ограниченный (оператор A ограничен, если $\|A\Phi\| \leqslant C\|\Phi\|$ для некоторой константы C и всех $\Phi \in \mathscr{H}$). В этом общем случае говорят, что луч *физически реализуем,* если оператор проектирования на него является наблюдаемой *). Рассмотрим множество всех ограниченных операторов, которые коммутируют со всеми наблюдаемыми; это — множество θ', называемое *коммутантом* θ. Лимитация определения θ' ограниченными операторами — попросту вопрос соглашения. Действительно, в θ' не входят операторы Q и B, как не ограниченные, но θ' содержит ассоциированные с ними проекционные операторы, проектирующие на состояния различных возможных значений Q и B.

Множество θ' частично характеризует правила суперотбора, имеющиеся в этой теории. Например, если каждый эрмитов оператор является наблюдаемой, то любое состояние физически реализуемо, так как любой проекционный

*) E_Φ, оператор проектирования на вектор Φ, дается формулой

$$E_\Phi\Psi = (\Phi, \Psi)[\|\Phi\|^2]^{-1}\Phi.$$

оператор — эрмитов. Значит, в этом случае правил суперотбора нет; множество θ' состоит исключительно из операторов, кратных единичному.

Если же предположить, что все операторы в θ' коммутируют между собой (это иногда называют *гипотезой коммутативных правил суперотбора*), то структура множества физически реализуемых состояний существенно упростится. Правила суперотбора в θ' могут быть одновременно диагонализованы, и $\mathscr{H}$ распадается на ортогональные подпространства, в которых каждый из операторов, определяющих правила суперотбора, принимает определенное значение. Эти подпространства называются *когерентными подпространствами*. Наблюдаемые отображают когерентные подпространства на самих себя, и единственные операторы, которые определены на одном когерентном подпространстве, преобразуют его в себя и коммутируют со всеми наблюдаемыми, суть операторы, кратные единичному, т. е. наблюдаемые, будучи лимитированы одним-единственным когерентным подпространством, образуют неприводимое множество операторов.

Существует один важный случай, когда можно доказать, что гипотеза коммутативных правил сверхотбора выполняется: когда существует полный коммутирующий набор наблюдаемых *). Любой оператор, который коммутирует со всеми операторами такого набора, является функцией операторов из этого набора. В частности, любой оператор, который принадлежит θ',— функция наблюдаемых этого набора. Так что в этом случае все операторы в θ' коммутируют.

Хотя наблюдаемые какого-либо частного когерентного подпространства неприводимы, отсюда никоим образом не следует, что они включают в себя каждый эрмитов оператор. Например, в некотором специальном когерентном подпространстве имеются нормируемые состояния с бесконечной энергией, а состояния такого рода не следует относить к физически реализуемым. Значит, проекционный оператор на такое состояние не будет наблюдаемой, хотя он и эрмитов. Несмотря на это, в дальнейшем будем считать, что

---

*) Полный коммутирующий набор — стандартная терминология Дирака; его называют также *максимальным абелевым набором.*

θ' коммутативно и что каждый луч когерентного подпространства физически реализуем. Эта гипотеза делается исключительно ради математического удобства. Действительно, анализ можно было бы провести при намного более общих предположениях ценой бóльших усилий.

Надо подчеркнуть, что рассмотренные правила сверхотбора для Q, B и $(-1)^F$, подобно всем законам физики, зависят от эксперимента. В настоящий момент совершенно неясно, существуют ли еще какие-то правила сверхотбора. Например, возможно, имеются законы сохранения лептонов, определяющие правила сверхотбора.

1-2. ОПЕРАЦИИ СИММЕТРИИ

Операция симметрии (иногда называемая *принципом инвариантности* или просто *симметрией*) физической системы есть соответствие, при котором каждому физически реализуемому состоянию Φ сопоставляется другое, Φ', такое, что все вероятности переходов сохраняются:

$$|(\Phi', \Psi')|^2 = |(\Phi, \Psi)|^2. \tag{1-1}$$

Предполагается, что отображение $\Phi \to \Phi'$ взаимно однозначно. Это значит, что когда Φ пробегает все физически реализуемые состояния, то Φ' делает то же, причем если Φ и Ψ различны, то будут различны также Φ' и Ψ'. Примером симметрии является оператор трансляции системы на четыре-вектор a. Это изображается с помощью некоторого оператора $V(a)$, являющегося унитарным [т. е. $(V\Phi, V\Psi) = (\Phi, \Psi)$]. Другой пример — оператор Θ для PCT, который антиунитарен [т. е. $(\Theta\Phi, \Phi\Psi) = \overline{(\Phi, \Psi)}$]. Между прочим, оператор Θ переставляет когерентные подпространства с противоположными зарядами и барионными числами. Ясно, что как унитарный, так и антиунитарный операторы удовлетворяют (1-1). Действительно, все отображения $\Phi \to \Phi'$ приводят, по существу, к единственному преобразованию $\Phi \to \Phi'$, удовлетворяющему (1-1), а такое преобразование или унитарно или антиунитарно [1].

Теорема 1-1

Пусть $\mathbf{\Phi} \to \mathbf{\Phi}'$ — симметрия физической теории, удовлетворяющей гипотезе коммутативных правил сверхотбора.

Если эта симметрия оставляет когерентные подпространства инвариантными, то в каждом из них существует унитарный или антиунитарный оператор V такой, что для всех физически реализуемых состояний из этого подпространства

$$\mathbf{\Phi}' = V\mathbf{\Phi}. \tag{1-2}$$

Оператор V определяется однозначно с точностью до фазы.

Если симметрия не оставляет когерентные подпространства инвариантными, то ее сужение на какое-либо одно когерентное подпространство приводит к его взаимно однозначному отображению на другое когерентное подпространство. Это отображение унитарно или антиунитарно и единственно с точностью до фазы.

Мы не будем доказывать здесь эту теорему; ее существо в следующем. Взаимно однозначное соответствие лучей $\mathbf{\Phi} \to \mathbf{\Phi}'$ может индуцироваться одним из многих различных векторных соответствий $\Phi \to \Phi'$ из основного гильбертова пространства, но вообще такое соответствие ни линейно, ни антилинейно, т. е. не имеют места ни

$$\alpha\Phi' + \beta\Psi' = (\alpha\Phi + \beta\Psi)',$$

ни

$$\bar{\alpha}\Phi' + \bar{\beta}\Psi' = (\alpha\Phi + \beta\Psi)'.$$

Вот утверждение теоремы: если рассматривать векторы одного-единственного когерентного подпространства, то найдется линейное или антилинейное преобразование, единственное с точностью до фазы (или одно или другое, но не оба вместе!), которое и приводит к заданному соответствию между лучами.

Последнее замечание об операциях симметрии. Ясно, что в силу нашего определения каждый унитарный и анти-

унитарный оператор оказывается оператором симметрии, а теорема 1-1 показывает, что это в существенном единственные такие операторы. Как же тогда одна система может оказаться более симметричной, чем другая? Ответ — в физической интерпретации этих операций. Рассмотрим, например, теорию двух бесспиновых частиц с операторами координаты и импульса $\mathbf{q}_1(t)$, $\mathbf{q}_2(t)$, $\mathbf{p}_1(t)$, $\mathbf{p}_2(t)$. Здесь отображение $\mathbf{q}_i(t) \to -\mathbf{q}_i(t)$, $\mathbf{p}_i(t) \to -\mathbf{p}_i(t)$ наблюдаемых самих на себя всегда может быть определено; но только лишь, если система обладает симметрией относительно инверсии пространства, это отображение будет индуцироваться унитарным оператором V по формуле

$$V\mathbf{q}_j(t)V^{-1} = -\mathbf{q}_j(t), \qquad V\mathbf{p}_j(t)V^{-1} = -\mathbf{p}_j(t), \qquad j = 1, 2, \tag{1-3}$$

где V не зависит от t.

С другой стороны, может оказаться, что возможно определить унитарный оператор V, который действует как оператор четности для движения центра тяжести и для полного импульса, даже если теория не инвариантна относительно инверсии пространства, т. е. даже если не существует оператора V, удовлетворяющего (1-3). Например, V мог бы удовлетворять

$$\begin{aligned} V\mathbf{q}_1(t)V^{-1} &= -\mathbf{q}_2(t), & V\mathbf{q}_2(t)V^{-1} &= -\mathbf{q}_1(t), \\ V\mathbf{p}_1(t)V^{-1} &= -\mathbf{p}_2(t), & V\mathbf{p}_2(t)V^{-1} &= -\mathbf{p}_1(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}_1(t) + \mathbf{q}_2(t))V^{-1} &= -(\mathbf{q}_1(t) + \mathbf{q}_2(t)), \\ V(\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t))V^{-1} &= -(\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)). \end{aligned}$$

Из этого примера ясно, что утверждение о том, что физическая система обладает симметрией при инверсии пространства, имеет смысл лишь, когда мы определили, как действует инверсия пространства на наблюдаемые рассматриваемой системы. В остальных разделах этой главы будем предполагать, что такое уточнение уже сделано для релятивистских преобразований. В главе 3 эти уточнения будут конкретно сделаны в терминах полей.

1-3. ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ПУАНКАРЕ

К самым главным симметриям релятивистской квантовой теории относятся те, которые возникают в результате самих преобразований Лоренца. В нескольких следующих параграфах мы введем обозначения и установим основные факты, относящиеся к этим симметриям.

Лоренц-инвариантное скалярное произведение двух четыре-векторов $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ будет записываться как

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \equiv x^\mu y_\mu \tag{1-4}$$

с обычным соглашением о суммировании по повторяющимся индексам.

Здесь

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu,$$

а $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ есть μ, ν-компонента матрицы G

$$G = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Преобразование Лоренца Λ есть линейное преобразование, которое отображает пространство-время само на себя и которое сохраняет скалярное произведение (1-4): $(\Lambda x) \cdot (\Lambda y) = x \cdot y$. Если $(\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, то (вещественная) матрица $\Lambda^\mu{}_\nu$ этого преобразования должна удовлетворять

$$\Lambda^\varkappa{}_\mu \Lambda_{\varkappa\nu} = g_{\mu\nu} \quad \text{или} \quad \Lambda^T G \Lambda = G, \tag{1-5}$$

где транспонированная матрица Λ^T матрицы Λ определяется соотношением $(\Lambda^T)^\mu{}_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu$, а индексы при Λ опускаются так:

$$\Lambda_{\varkappa\nu} = g_{\varkappa\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu = (G\Lambda)_{\varkappa\nu}.$$

Если Λ и M удовлетворяют соотношению (1-5), то $\Lambda\mathrm{M}$ и Λ^{-1} также удовлетворяют тому же соотношению. Здесь

$$(\Lambda\mathrm{M})^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\varkappa \mathrm{M}^\varkappa{}_\nu,$$

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\varkappa \Lambda^\varkappa{}_\nu = g^\mu{}_\nu = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ 1, & \mu = \nu, \end{cases} \tag{1-6}$$

так что преобразования Лоренца образуют группу, группу Лоренца L. Два преобразования Λ и M по определению называются близкими друг другу, если числа $\Lambda^\mu{}_\nu$ и $M^\mu{}_\nu$ близки при всех $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. При таком определении ясно, что Λ^{-1} и ΛM — непрерывные функции Λ и M соответственно. Далее, имеет смысл говорить, что два преобразования Лоренца могут быть соединены друг с другом непрерывной кривой из преобразований Лоренца.

L состоит из четырех компонент, каждая из которых связна в том смысле, что любая ее точка может быть соединена с любой другой ее точкой, но ни одно преобразование Лоренца из одной компоненты не может быть соединено с преобразованием Лоренца из другой компоненты. Чтобы это увидеть, заметим, что как $\det \Lambda$, так и $\operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0$ являются непрерывными функциями матричных элементов $\Lambda^\mu{}_\nu$. Кроме того, $\det \Lambda = \pm 1$ и $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$ или $\leqslant -1$. [Первое получается, если взять детерминант от (1-5); второе делается очевидным, если взглянуть на 0,0-элемент (1-5). Он имеет вид

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{j=1}^{3} (\Lambda^j{}_0)^2 = 1.$$

Поэтому $|\Lambda^0{}_0| \geqslant 1$.] Таким образом, $\det \Lambda$ и $\operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0$ должны быть постоянны на каждой из компонент. Вот четыре существующие возможности:

$$\begin{aligned}
&L_+^\uparrow : \det \Lambda = +1, \operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0 = +1, \text{ содержит } 1,\\
&L_-^\uparrow : \det \Lambda = -1, \operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0 = +1, \text{ содержит } I_s,\\
&L_+^\downarrow : \det \Lambda = +1, \operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0 = -1, \text{ содержит } I_{st},\\
&L_-^\downarrow : \det \Lambda = -1, \operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0 = -1, \text{ содержит } I_t.
\end{aligned} \tag{1-7}$$

Здесь преобразования Лоренца I_s (*инверсия пространства*), I_t (*инверсия времени*) и I_{st} (*инверсия пространства-времени*) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
&(I_s x)^0 = x^0 \qquad (I_s x)^j = -x^j, \qquad j = 1, 2, 3,\\
&(I_t x)^0 = -x^0 \qquad (I_t x)^j = x^j, \qquad j = 1, 2, 3,\\
&(I_{st} x) = -x = (I_s I_t x).
\end{aligned} \tag{1-8}$$

Очевидно, I_s отображает $L_-^\uparrow$ взаимно однозначно на $L_+^\uparrow$, I_t отображает $L_-^\downarrow$ взаимно однозначно на $L_+^\uparrow$ и I_{st} отображает $L_+^\downarrow$ взаимно однозначно на $L_+^\uparrow$. Все Λ, для которых $\Lambda^0{}_0 \geqslant +1$, называются *ортохронными*, Λ, для которых $\det \Lambda = +1$, — *собственными*, и Λ, для которых $\operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0 \det \Lambda = +1$, — *ортохорными*. Чтобы завершить доказательство нашего утверждения, надо показать, что $L_+^\uparrow$ связно. Это делается обычно с помощью доказательства, что любое $\Lambda \in L_+^\uparrow$ имеет разложение

$$\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3, \tag{1-9}$$

где Λ_1 и Λ_3 — вращения, а Λ_2 — чистое преобразование Лоренца вдоль три-оси, определяемое соотношением

$$x \to \hat{x} = \Lambda_2 x,$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{x}^0 = x^0 \operatorname{ch}\chi + x^3 \operatorname{sh}\chi, \\ &\hat{x}^3 = x^0 \operatorname{sh}\chi + x^3 \operatorname{ch}\chi, \qquad \operatorname{th}\chi = \frac{v}{c}, \\ &\hat{x}^1 = x^1, \qquad \hat{x}^2 = x^2. \end{aligned} \tag{1-10}$$

Мы можем тогда от любого преобразования вида (1-9) перейти к любому другому преобразованию того же вида с помощью непрерывного варьирования осей и углов поворота в Λ_1 и Λ_3, а также параметра χ в Λ_2. Мы не будем здесь доказывать (1-9), отсылая читателя к [7] из библиографии к этой главе. Это завершает доказательство того, что L имеет в точности четыре компоненты. Они изображены на рис. 1-1.

На рис. 1-1 обозначены также три важные подгруппы L:

$L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$ *ортохорная группа Лоренца*,

$L_+ = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$ *собственная группа Лоренца*,

$L_0 = L_+^\uparrow \cup L_-^\downarrow$ *ортохронная группа Лоренца*.

Со специальной группой Лоренца $L_+^\uparrow$ ассоциируется группа комплексных 2×2-матриц с детерминантом единица, которую мы будем обозначать $SL(2, C)$. (S значит специальная, т. е. детерминант единица, L — линейная,

2 — два измерения и C — комплексная.) Она важна при описании трансформационных свойств спиноров. Связь между $L_+^\uparrow$ и $SL(2, C)$ получается следующим стандартным образом.

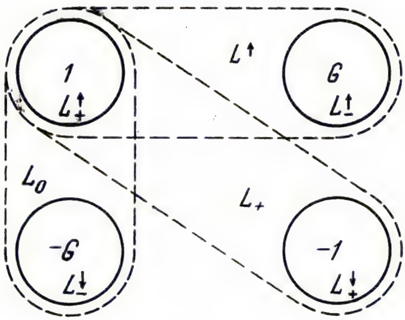

Рис. 1-1. Свойства связности группы Лоренца L и ее подгруппы: собственная группа Лоренца L_+; ортохронная группа Лоренца $L^\uparrow$; ортохорная группа Лоренца L_0; и специальная группа Лоренца $L_+^\uparrow$.

Если x — любой четыре-вектор, то с ним ассоциируется 2×2-матрица, которая задается соотношением

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu \tau^\mu = x^0 1 + \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}, \quad (1\text{-}11)$$

где

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратно, каждая 2×2-матрица X определяет четыре-вектор:

$$x^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X\tau^\mu) \quad \text{и} \quad X = \underset{\sim}{x}. \qquad (1\text{-}12)$$

Если x^μ вещественно, то $\underset{\sim}{x}$ эрмитова: $\underset{\sim}{x}^* = \underset{\sim}{x}$; если X эрмитова, то из (1-12) получается вещественный четыре-

вектор. Заметим, что

$$\det \underset{\sim}{x} = x^\mu x_\mu, \quad \frac{1}{2}[\det(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}) - \det \underset{\sim}{x} - \det \underset{\sim}{y}] = x^\mu y_\mu, \tag{1-13}$$

так что если A — любая 2×2-матрица с детерминантом единица, то

$$\hat{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}A^* \tag{1-14}$$

определяет вещественное линейное отображение четыре-векторов x на четыре-векторы $\hat{x}$, удовлетворяющие соотношению $(\hat{x})^\mu\ (\hat{y})_\mu = x^\mu y_\mu$. Поэтому оно является преобразованием Лоренца, которое мы будем обозначать $\Lambda(A)$. На самом деле $\Lambda(A)$ — специальное преобразование Лоренца. Это вытекает из соображений непрерывности: в (1-14) можно непрерывно варьировать A, пока она не станет единичной. Соответствующее $\Lambda(A)$, изменяясь непрерывно, становится единичным. Поэтому $\Lambda(A) \in L_+^\uparrow$. Ясно, что $\Lambda(-A) = \Lambda(A)$. Читателю предоставляется проверить, что если $\Lambda(A) = \Lambda(B)$, то $A = \pm B$. Соответствие $A \to \Lambda(A)$ обладает свойствами

$$\Lambda(A)\Lambda(B) = \Lambda(AB), \quad \Lambda(1) = 1. \tag{1-15}$$

Иными словами, $A \to \Lambda(A)$ есть гомоморфизм $SL(2, C)$ на $L_+^\uparrow$.

Дальше нам придется пользоваться другим соответствием между векторами и 2×2-матрицами

$$\tilde{x} = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu \tau^\mu = x^0 1 - \mathbf{x}\cdot\tau. \tag{1-16}$$

Заметим, что

$$A^*\tilde{x}A = \tilde{y}, \quad \text{где} \quad y = \Lambda(A^{-1})x, \tag{1-17}$$

благодаря

$$(\tau^2)(\tau^\mu)^T(\tau^2)^{-1} = g^{\mu\mu}\tau^\mu,$$

где τ^2 дается соотношением (1-11). Отсюда следует, что

$$\tau^2(\underset{\sim}{x})^T(\tau^2)^{-1} = \tilde{x}$$

и

$$\tau^2 A^T(\tau^2)^{-1} = A^{-1} \tag{1-18}$$

для A с детерминантом 1.

Другой группой, ассоциированной с группой Лоренца L, является *комплексная группа Лоренца*, которую будем обозначать через $L(C)$. Как увидим, она существенна при доказательстве теоремы PCT. Она состоит из всех комплексных матриц, удовлетворяющих (1-5). Аргумент, приведенный выше для доказательства, что $\det\Lambda = \pm 1$, спра-

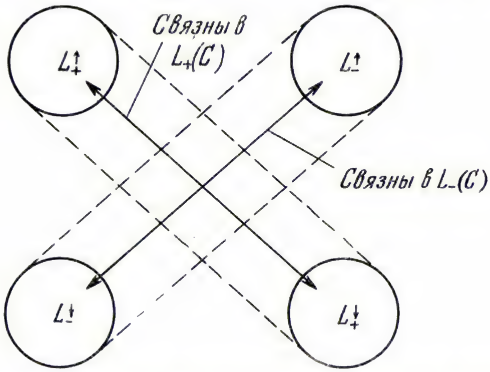

Рис. 1-2. Свойства связности комплексной группы Лоренца $L(C)$. Имеются две связные компоненты: $L_+(C)$ — собственная комплексная группа Лоренца, содержащая $L_+^\uparrow$ и $L_+^\downarrow$, и $L_-(C)$, содержащая $L_-^\uparrow$ и $L_-^\downarrow$.

ведлив также и для комплексной группы Лоренца $L(C)$, которая тем самым имеет минимум две компоненты $L_\pm(C)$, соответственно знаку $\det\Lambda$. На самом деле, она имеет в точности две связные компоненты. Преобразования 1 и -1, которые несвязны в L, будут связными в $L(C)$. Рассмотрим, например, непрерывную кривую преобразований $\Lambda^\mu{}_\nu$:

$$\Lambda_t = \begin{Bmatrix} \operatorname{ch} it & 0 & 0 & \operatorname{sh} it \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ \operatorname{sh} it & 0 & 0 & \operatorname{ch} it \end{Bmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

При изменении t от 0 до π эта кривая соединяет 1 с -1. Свойства связности $L(C)$ иллюстрирует рис. 1-2.

Так же как специальная группа Лоренца $L_+^\uparrow$ ассоциирована с $SL(2, C)$, собственная комплексная группа Лоренца ассоциирована с $SL(2, C) \otimes SL(2, C)$. Эта последняя группа есть множество всех пар 2×2-матриц с детерминантом единица с законом умножения

$$\{A_1, B_1\}\{A_2, B_2\} = \{A_1A_2, B_1B_2\}.$$

Связь между матричной парой $\{A, B\}$ и соответствующим комплексным преобразованием Лоренца $\Lambda(A, B)$ дается аналогом формулы (1-14)

$$\underset{\sim}{\hat{x}} = A\underset{\sim}{x}B^T. \tag{1-19}$$

Здесь $\underset{\sim}{x}$ также определяется по (1-11), но вектор x^μ комплексный. Очевидно,

$$\Lambda(A_1, B_1)\Lambda(A_2, B_2) = \Lambda(A_1A_2, B_1B_2) \tag{1-20}$$

и $\Lambda(1, 1) = 1$. Легко убедиться, что единственными матричными парами, приводящими к заданному $\Lambda(A, B)$, являются $(\pm A, \pm B)$. В частности,

$$\Lambda(-1, 1) = \Lambda(1, -1) = -1. \tag{1-21}$$

Каждой из рассмотренных нами до сих пор групп сопоставляется соответствующая неоднородная группа, элементами которой служат пары, состоящие из трансляции и однородного преобразования. Например, *группа Пуанкаре* $\mathscr{P}$ имеет элементы $\{a, \Lambda\}$, где $\Lambda \in L$, с законом умножения

$$\{a_1, \Lambda_1\}\{a_2, \Lambda_2\} = \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2\}, \tag{1-22}$$

вытекающим из интерпретации элемента $\{a, \Lambda\}$ как линейного преобразования

$$x \to \Lambda x + a.$$

$\mathscr{P}$ имеет четыре компоненты, различимые по значениям $\det \Lambda$ и $\operatorname{sgn} \Lambda^0{}_0$, а именно, $\mathscr{P}_+^\uparrow$, $\mathscr{P}_-^\uparrow$, $\mathscr{P}_+^\downarrow$ и $\mathscr{P}_-^\downarrow$. *Комплексная группа Пуанкаре* $\mathscr{P}(C)$ допускает комплексные трансляции, но закон умножения тот же (1-22). Она имеет две компоненты $\mathscr{P}_\pm(C)$, различающиеся значениями $\det \Lambda$. Неоднородная группа, соответствующая $SL(2, C)$, не имеет специального названия; мы будем называть ее

неоднородной группой $SL(2,C)$. Она состоит из пар $\{a, A\}$, где a — трансляция и $A \in SL(2, C)$, с законом умножения

$$\{a_1, A_1\}\{a_2, A_2\} = \{a_1 + \Lambda(A_1)a_2, A_1A_2\}. \qquad (1\text{-}23)$$

Иногда нам будет удобно писать сокращенно Aa вместо $\Lambda(A)a$, так мы и будем делать в дальнейшем. Аналогично неоднородная группа для $SL(2, C) \otimes SL(2, C)$ определяется как множество пар $\{a, \{A, B\}\}$, где a — комплексная трансляция и $A, B \in SL(2, C)$, с законом умножения

$$\{a_1\{A_1, B_1\}\}\{a_2, \{A_2, B_2\}\} = \{a_1 + \Lambda(A_1, B_1)a_2, \{A_1A_2, B_1B_2\}\}. \qquad (1\text{-}24)$$

Всюду в дальнейшем все рассматриваемые теории будут инвариантны относительно $\mathscr{P}_+^\uparrow$ или какой-нибудь другой подгруппы $\mathscr{P}$. Соответствующие унитарные или антиунитарные преобразования состояний будут обозначаться $U(a, \Lambda)$.

Этим завершается наше обсуждение самих групп. Кроме этого, нам будут нужны некоторые сведения о матричных представлениях $SL(2, C)$. Это и есть то сырье, из которого в главе 3 будут строиться законы преобразования полей*). Напомним, что произвольное матричное представление $SL(2, C)$, т. е. соответствие $A \to S(A)$, при котором $S(1) = 1$ и $S(A)S(B) = S(AB)$, может быть записано в виде

$$T \begin{Bmatrix} S_1(A) & 0 & 0 \cdots \\ 0 & S_2(A) & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{Bmatrix} T^{-1}, \qquad (1\text{-}25)$$

где отображения $A \to S_1(A)$, $A \to S_2(A)$ и т. д. неприводимы, а T — какое-либо фиксированное линейное преобразование. Так что надо описать только неприводимые представления.

*) Читатель, незнакомый с конечными представлениями $SL(2C)$, вполне может опустить при первом чтении остаток этого раздела. Доступное изложение теории этих представлений можно найти в [9] и [10]. По поводу комплексной группы Лоренца см. также [7]. Мы включили сюда этот материал, так как хотим исследовать в главах 3 и 4 произвольное спинорное поле.

Рассмотрим набор величин $\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k}$, где α и $\dot{\beta}$ принимают значения 1 и 2, а ξ симметрична относительно как перестановок α, так и перестановок β. Для каждого $A \in SL(2, C)$ мы определяем линейное преобразование этих ξ по формуле

$$\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k} \to \sum_{(\rho)(\dot{\sigma})} A_{\alpha_1 \rho_1} \dots A_{\alpha_j \rho_j} \bar{A}_{\dot{\beta}_1 \dot{\sigma}_1} \dots \bar{A}_{\dot{\beta}_k \dot{\sigma}_k} \dots \xi_{\rho_1 \dots \rho_j \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_k}. \tag{1-26}$$

[Точка над индексом означает просто, что этот индекс преобразуется по $\bar{A}$, а не по A; символ (ρ) означает $\rho_1 \dots \rho_j$; $(\sigma) - \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_k$.] Это представление $SL(2, C)$ обозначается обычно $\mathscr{D}^{(j/2;\, k/2)}$. Каждое неприводимое представление эквивалентно одному из них.

Если мы наложим на матрицы A условие унитарности и потребуем, чтобы их детерминант равнялся единице, то получим подгруппу SU_2 группы $SL(2, C)$. Ясно, что SU_2 соответствует по (1-14) группе вращений три-пространства. [След (1-14) имеет вид $2\hat{x}^0 = 2x^0$, если A унитарна.] Неприводимые представления SU_2 эквивалентны одному из отображений $A \to \mathscr{D}^{(j/2,\, 0)}(A)$ с $A \in SU_2$; они обозначаются обычно $\mathscr{D}^{(j/2)}$. Это — обычные преобразования, ассоциированные с системой, имеющей момент, равный $j/2$. Представление SU_2, получаемое при сужении $A \to \mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}(A)$ на $A \in SU_2$, не будет неприводимым. В действительности, это — прямое произведение $\mathscr{D}^{(j/2)}$ на $\mathscr{D}^{(k/2)}$ так что в силу обычных законов сложения моментов оно равно сумме представлений

$$\mathscr{D}^{\left(\frac{j+k}{2}\right)}, \quad \mathscr{D}^{\left(\frac{j+k}{2}-1\right)}, \quad \dots, \quad \mathscr{D}^{\left|\frac{j-k}{2}\right|}.$$

Представление $\mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}$ можно аналитически продолжить из $SL(2, C)$ на $SL(2, C) \otimes SL(2, C)$, заменяя $\{A, \bar{A}\}$ на $\{A, B\}$. Определим матрицу $\mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}(A, B)$ посредством линейного соответствия

$$\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k} \to \sum_{(\rho)(\dot{\sigma})} A_{\alpha_1 \rho_1} \dots A_{\alpha_j \rho_j} B_{\dot{\beta}_1 \dot{\sigma}_1} \dots B_{\dot{\beta}_k \dot{\sigma}_k} \xi_{\rho_1 \dots \rho_j \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_k}.$$

Ясно, что

$$\mathscr{D}^{\left(\frac{j}{2},\frac{k}{2}\right)}(1,\ -1)=(-1)^k,$$
$$\mathscr{D}^{\left(\frac{j}{2},\frac{k}{2}\right)}(-1,\ 1)=(-1)^j, \tag{1-27}$$

— соотношение, которое нам понадобится при обсуждении теоремы PCT.

Рассматриваемые спинорные поля иногда будут иметь также определенные законы преобразования при пространственной инверсии I_s (ее также называют P), временной инверсии I_t (или T) и зарядовом сопряжении C. Произведение этих преобразований в том или ином порядке, скажем PCT, всегда будет симметрией для локальной теории поля, независимо от того, являются ли симметриями отдельные сомножители; это и есть знаменитая теорема PCT, которая будет доказана в главе 4. Чтобы оправдать наименование PCT, мы рассмотрим здесь действие P, C и T порознь на спинорную величину общего вида.

Для ясности напомним связь между нашим описанием симметрий и тем, которое было стандартным в квантовой теории поля тридцатилетней давности. Тогда симметрия задавалась как правило подстановки, $A\to\hat{A}$, для операторов A, в терминах которых формулировались уравнения теории. Например, в случае, обсуждавшемся в (1-3), инверсия пространства задавалась как $\mathbf{q}_i(t)\to\hat{\mathbf{q}}_i(t)=-\mathbf{q}_i(t)$, $\mathbf{p}_i(t)\to\hat{\mathbf{p}}_i(t)=-\mathbf{p}_i(t)$. Симметрия обеспечивалась требованием, чтобы уравнения движения были инвариантны по своей форме при подстановке $A\to\hat{A}$. Молчаливо допускалось при этом, что для каждой подстановки найдется унитарное преобразование $\Phi\to\hat{\Phi}$ такое, что

$$(\Phi,\ \hat{A}\Phi)=(\hat{\Phi},\ A\hat{\Phi}). \tag{1-28}$$

Это уравнение справедливо для всех Φ, так что если $\hat{\Phi}=U\Phi$, то оно эквивалентно

$$\hat{A}=U^{-1}AU. \tag{1-29}$$

Вскоре, однако, стало ясно, что существуют также важные симметрии, для которых $\Phi\to\hat{\Phi}$ — антиунитарное

соответствие. Для них

$$(\hat{\Phi}, A\hat{\Phi}) = (U\Phi, AU\Phi) = \overline{(\Phi, U^{-1}AU\Phi)} = \\ = (\Phi, (U^{-1}AU)^*\Phi),$$

так что вместо (1-29) будет

$$\hat{A} = (U^{-1}AU)^*, \tag{1-30}$$

если U антиунитарно. Из уравнения (1-30) следует, что

$$\widehat{AB} = (U^{-1}ABU)^* = (U^{-1}BU)^*(U^{-1}AU)^* = \hat{B}\hat{A}, \tag{1-31}$$

а это ведет к весьма любопытным правилам подстановки. Например, PCT-симметрия Θ обладает свойством, приводящим для заряженного скалярного поля φ (это понятие будет точно определено в главе 3) к соотношению

$$\Theta^{-1}\varphi(x)\Theta = \varphi(-x)^*, \tag{1-32}$$

где Θ антиунитарен. Итак, вот правило подстановки для PCT: заменить $\varphi(x)$ на $\varphi(-x)$ и написать все произведения операторов в обратном порядке. За последнее время вошло в обычай формулировать симметрии более прямым путем с точки зрения физики, как это было сделано в разделе 1-2. Однако в следующих нескольких параграфах будет выгодно пользоваться обеими формулировками, так как это поможет при установлении трансформационных законов для спинорных полей общего вида.

Начнем с рассмотрения двух простых случаев, координатного вектора x и диракова спинора ψ.

С каждым действительным вектором x пространства-времени мы ассоциировали эрмитову 2×2-матрицу $\underset{\sim}{x}$. Условимся считать матричные элементы $\underset{\sim}{x}$ компонентами спинора второго ранга, у которого один индекс с точкой, а другой без:

$$x_{\alpha\dot{\beta}} = (\underset{\sim}{x})_{\alpha\dot{\beta}}. \tag{1-33}$$

Это согласуется с законом преобразования $\underset{\sim}{x} \to A\underset{\sim}{x}A^*$ и с нашим условием, что индексы с точкой преобразуются по $\bar{A}$. Теперь операции P и T будут даваться соответственно формулами

$$P:\quad \underset{\sim}{x} \to \zeta\underset{\sim}{\bar{x}}\zeta^{-1}, \quad \text{где} \quad \zeta = i\tau^2, \tag{1-34}$$

$$T:\quad \underset{\sim}{x} \to -\zeta\underset{\sim}{\bar{x}}\zeta^{-1}. \tag{1-35}$$

Здесь $\underset{\sim}{\bar{x}}$ — комплексно сопряженное $\underset{\sim}{x}$

Чтобы представить (1-34) и (1-35) в виде линейных преобразований, надо ввести сопряженный спинор

$$x_{\dot{\alpha}\beta} = (\bar{\underset{\sim}{x}})_{\dot{\alpha}\beta}. \tag{1-36}$$

Тогда эрмитовость $\underset{\sim}{x}$ выразится как $x_{\dot{\alpha}\beta} = x_{\dot{\beta}\alpha}$. Эта пара преобразуется при инверсиях согласно

$$P: \begin{pmatrix} x_{\alpha\dot{\beta}} \\ x_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \zeta\otimes\zeta \\ \zeta\otimes\zeta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha\dot{\beta}} \\ x_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix} \tag{1-37}$$

и

$$T: \begin{pmatrix} x_{\alpha\dot{\beta}} \\ x_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -\zeta\otimes\zeta \\ -\zeta\otimes\zeta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha\dot{\beta}} \\ x_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix}. \tag{1-38}$$

Здесь $\zeta\otimes\zeta$ надо понимать как линейное преобразование, в котором первая ζ действует на первый индекс, а вторая — на второй.

До сих пор мы обсуждали комплекснозначный спинор второго ранга. Теперь перейдем к случаю набора операторов $\xi_{\alpha\dot{\beta}}$ квантовой теории, которые имеют такой же закон преобразования. (Нам нет нужды давать им ту или иную частную физическую интерпретацию.) Уравнения (1-37) и (1-38) тогда надо интерпретировать как правила подстановки, причем $(\xi_{\alpha\dot{\beta}})^* = \xi_{\alpha\dot{\beta}}$. Так как пространственная инверсия изображается унитарным оператором $U(I_s)$, а временная инверсия — антиунитарным оператором $U(I_t)$, то будем иметь:

$$P: \quad U(I_s)^{-1} \begin{pmatrix} \xi_{\alpha\dot{\beta}} \\ \xi_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix} U(I_s) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta\otimes\zeta \\ \zeta\otimes\zeta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\alpha\dot{\beta}} \\ \xi_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix}, \tag{1-39}$$

тогда как

$$T: \quad \left[U(I_t)^{-1} \begin{pmatrix} \xi_{\alpha\dot{\beta}} \\ \xi_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix} U(I_t) \right]^* = -\begin{pmatrix} 0 & \zeta\otimes\zeta \\ \zeta\otimes\zeta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\alpha\dot{\beta}} \\ \xi_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix},$$

что равносильно

$$U(I_t)^{-1} \begin{pmatrix} \xi_{\alpha\dot{\beta}} \\ \xi_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix} U(I_t) = -\begin{pmatrix} \zeta\otimes\zeta & 0 \\ 0 & \zeta\otimes\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\alpha\dot{\beta}} \\ \xi_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix}. \tag{1-40}$$

Вторым простым примером является четырехкомпонентный дираков спинор ψ. Здесь можно получить другую нетривиальную иллюстрацию преобразований P и T, а также и C. ψ удовлетворяет уравнению

$$\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\right) \psi(x) = 0, \tag{1-41}$$

где 4×4-матрицы γ^μ являются решениями уравнений

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2g^{\mu\nu}. \tag{1-42}$$

Тогда существует 4×4-представление $SL(2, C)$, $A \to S(A)$, которое удовлетворяет соотношениям

$$S(A)^{-1}\gamma^\mu S(A) = \Lambda^\mu{}_\nu(A)\gamma^\nu. \tag{1-43}$$

Спинор преобразуется так: $\psi(x) \to S(A)\psi(\Lambda^{-1}x)$. Связь между A и $S(A)$ можно указать явно:

$$S(A) = (a^0\mathbf{1} + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\frac{1}{2}(1 + i\gamma^5) + (\bar{a}^0\mathbf{1} - \bar{\mathbf{a}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\frac{1}{2}(1 - i\gamma^5), \tag{1-44}$$

где

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \text{и} \ \boldsymbol{\sigma} = -i\gamma^5\boldsymbol{\alpha} = -i\gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$$

и

$$A = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu\tau^\mu, \qquad \det A = a^2 = 1.$$

Доказательство, что (1-44) на самом деле удовлетворяет (1-43), требует небольшой γ-гимнастики, при этом существенно используется соотношение (1-18).

Можно выбрать следующие правила подстановок, соответствующие P, C и T для уравнения Дирака:

$$\begin{aligned} P:&\quad \psi(x) \to -\gamma^0\psi(I_s x),\\ C:&\quad \psi(x) \to C^{-1}\overline{\psi(x)} = \psi^C(x),\\ T:&\quad \psi(x) \to -\gamma^0\gamma^5\psi^C(I_t x) = -\gamma^0\gamma^5 C^{-1}\overline{\psi(I_t x)}, \end{aligned} \tag{1-45}$$

где C — матрица, удовлетворяющая соотношению

$$C\gamma^\mu C^{-1} = \bar{\gamma}^\mu.$$

Матрицы γ и C можно взять в виде

$$\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = -i\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = -\begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$i\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}, \quad S(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \zeta^{-1}\bar{A}\zeta \end{pmatrix}.$$

В этом случае уравнение Дирака распадается на пару уравнений для двухкомпонентных объектов ξ, χ, где $\psi = \binom{\xi}{\chi}$:

$$\begin{aligned} &i\left(\frac{-\partial}{\partial x^0} + \sum_{j=1}^{3} \tau^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\chi + m\xi = 0, \\ &i\left(\frac{-\partial}{\partial x^0} - \sum_{j=1}^{3} \tau^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\xi + m\chi = 0. \end{aligned} \tag{1-46}$$

Двухкомпонентная величина $\eta_{\dot\alpha} = (\zeta\chi)_{\dot\alpha}$ преобразуется при преобразованиях из $SL(2, C)$ так же, как величина, комплексно сопряженная ξ (хотя она ей и не равна). В терминах ξ_α, $\eta_{\dot\alpha}$ правила подстановки принимают вид

$$\begin{aligned} &P: \quad \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \to i\begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \\ &C: \quad \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar\xi_\alpha \\ \bar\eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \\ &T: \quad \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar\xi_\alpha \\ \bar\eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1-47}$$

Мы интерпретируем их теперь как правила подстановок для операторов в соответствии с (1-29) для P и C и (1-30) для T. Таким образом,

$$\begin{aligned} &U(I_s)^{-1}\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix} U(I_s) = i\begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \\ &U(C)^{-1}\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix} U(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^*_\alpha \\ \eta^*_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1-48}$$

$$\begin{aligned} &U(I_t)^{-1}\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix} U(I_t) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \\ &\Theta^{-1}\begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix}\Theta = i\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^*_\alpha \\ \eta^*_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1-49}$$

где $U(C)$ — унитарный оператор, переводящий состояние в зарядово сопряженное, а Θ — антиунитарный PCT-оператор $U(I_s)\;U(C)\;U(I_t)$. Сравнение этих двух примеров подсказывает следующие определения для общего спинора:
Правила подстановки

$$P:\quad \begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} i, & j+k \text{ нечетное}\\ 1, & j+k \text{ четное}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}0 & (-1)^j\zeta\otimes\zeta\otimes\ldots\\ (-1)^k\zeta\otimes\zeta\otimes\ldots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix},$$
$$C:\quad \begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \bar\eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}, \tag{1-50}$$
$$T:\quad \begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\zeta\otimes\zeta\otimes\ldots & 0\\ 0 & \zeta\otimes\zeta\otimes\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \bar\eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix},$$
$$PCT:\quad \begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-i, & j+k \text{ нечетное}\\ 1, & j+k \text{ четное}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}(-1)^j & 0\\ 0 & (-1)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}. \tag{1-51}$$

В этих уравнениях

$$\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}=\xi_{\alpha_1\ldots\alpha_j\dot\beta_1\ldots\dot\beta_k},\quad \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}=\eta_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_j\beta_1\ldots\beta_k}.$$

В терминах преобразования состояний имеем:

$$U(I_s)^{-1}\begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}U(I_s)=\begin{pmatrix} i, & j+k \text{ нечетное}\\ 1, & j+k \text{ четное}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}0 & (-1)^j\zeta\otimes\zeta\otimes\ldots\\ (-1)^k\zeta\otimes\zeta\otimes\ldots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix},$$
$$U(C)^{-1}\begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}U(C)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^*_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta^*_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}, \tag{1-52}$$
$$U(I_t)^{-1}\begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}U(I_t)=\begin{pmatrix}\zeta\otimes\zeta\otimes\ldots & 0\\ 0 & \zeta\otimes\zeta\otimes\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}.$$

Это приводит к

$$\Theta^{-1}\begin{pmatrix}\xi_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix}\Theta=\begin{pmatrix}i,\ j+k\ \text{нечетное}\\ 1,\ j+k\ \text{четное}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}(-1)^j & 0\\ 0 & (-1)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^*_{(\alpha)(\dot\beta)}\\ \eta^*_{(\dot\alpha)(\beta)}\end{pmatrix},\qquad (1\text{-}53)$$

что мы и принимаем за определение закона преобразования при операции *PCT* для спинора общего вида. Фазы, выбранные в (1-50) и (1-52), в большой степени произвольны. Они отличаются знаком от фаз в (1-37) и (1-38). Вообще (но не всегда) подобная неоднозначность имеет физический смысл. Она приводит, например, к возможности делать различие между векторами и псевдовекторами. Проблема физического смысла фаз будет снова обсуждаться в разделе 3-5. Наряду с (1-50) и (1-52) существует много других законов, которые приводят к тому же преобразованию *PCT* (1-53). Нашей целью здесь было просто дать один пример.

1-4. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЗАКОНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОСТОЯНИЙ

Мы начнем с описания релятивистских законов преобразования некоторых простых и важных состояний и постепенно проложим себе путь к описанию поведения полной теории при преобразованиях Лоренца.

Вакуумное состояние

Вакуумное состояние $\boldsymbol{\Psi}_0$ имеет одинаковый вид для всех наблюдателей. Его энергия, импульс и момент равны нулю. Взяв вектор Ψ_0 в качестве представителя $\boldsymbol{\Psi}_0$, можно написать закон преобразования в простейшем виде, совместном с этими утверждениями:

$$U(a,\Lambda)\Psi_0=\Psi_0\quad\text{для}\quad\{a,\Lambda\}\in\mathscr{P}_+^\uparrow.\qquad (1\text{-}54)$$

Это дает так называемое тождественное представление $\mathscr{P}_+^\uparrow$: $\{a,\Lambda\}\to 1$. Важно отметить, что вакуум обладает этим трансформационным свойством совершенно независимо от того, какие имеются взаимодействия в других состояниях системы.

Одночастичные состояния и другие элементарные системы

Рассмотрим сначала простейший случай единственной скалярной частицы массы m, одинокой в мире без всяких внешних полей. Ее четыре-импульс удовлетворяет соотношению $p^2 = m^2$ с $p_0 \geqslant 0$, и если мы описываем ее состояния Ψ с помощью комплекснозначных функций $\Psi(p)$, удовлетворяющих условию *)

$$\int |\Psi(p)|^2 \, d\Omega_m(p) < \infty,$$

где

$$d\Omega_m(p) = \frac{d^3p}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}}, \tag{1-55}$$

то в качестве разумного закона преобразования имеем:

$$(U(a, \Lambda)\Psi)(p) = e^{ip\cdot a}\Psi(\Lambda^{-1}p). \tag{1-56}$$

Оператор $U(a, \Lambda)$ унитарен, так как

$$(U(a, \Lambda)\Phi, U(a, \Lambda)\Psi) =$$

$$= \int (\overline{U(a, \Lambda)\Phi})(p)\,(U(a, \Lambda)\Psi)(p)\,d\Omega_m(p) =$$

$$= \int \overline{\Phi}(\Lambda^{-1}p)\,\Psi(\Lambda^{-1}p)\,d\Omega_m(p) =$$

$$= \int \overline{\Phi}(p)\,\Psi(p)\,d\Omega_m(\Lambda p) = (\Phi, \Psi),$$

---

*) Связь этого описания с обычным формализмом Дирака следующая. Пусть $|p\rangle$ — состояние с четыре-импульсом p (это не будет состоянием в смысле, принятом в этой книге, поскольку оно не нормируемо), с нормировкой в континууме $\langle p'|p\rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')p^0$. Произвольное состояние Φ с массой m может тогда быть разложено: $\Phi = \int d\Omega_m(p) \; |p\rangle\langle p|\Phi\rangle$. Скалярным произведением двух таких состояний будет:

$$(\Phi, \Psi) = \int d\Omega_m(p)\overline{\langle p|\Phi\rangle}\langle p|\Psi\rangle.$$

Закон преобразования для $|p\rangle$ под действием $\{a, \Lambda\} \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ будет:

$$U(a, \Lambda)|p\rangle = e^{i\Lambda p\cdot a}|\Lambda p\rangle.$$

Очевидно, наша функция $\Psi(p)$ как раз и есть $\langle p|\Psi\rangle$.

при этом $d\Omega_m(\Lambda p) = d\Omega_m(p)$, поскольку $d\Omega_m$ — инвариантный объем на гиперболоиде $p^2 = m^2$.

Для описания закона преобразования частицы массы $m > 0$ и произвольного спина s надо немного техники. Состояние Ψ мы описываем набором комплекснозначных функций от p, отмеченных $2s$ спинорными индексами $\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}$:

$$\Psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}}(p),$$

и симметричных относительно перестановок всех α. Скалярное произведение

$$(\Phi, \Psi) = \int d\Omega_m(p) \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_{2s}} \bar{\Phi}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}}(p) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{2s} \left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)_{\alpha_j \beta_j} \Psi_{\beta_1 \ldots \beta_{2s}}(p), \qquad (1\text{-}57)$$

где $\tilde{p} = p_\mu \tau^\mu$. Может показаться не очевидным, что это скалярное произведение положительно определено, т. е. что $(\Phi, \Phi) \geqslant 0$ и $\Phi = 0$, если $(\Phi, \Phi) = 0$, но это на самом деле так благодаря тому, что матрица $\tilde{p}/m$ положительно определенная. (Ее след и детерминант равны $2p^0/m$ и 1 соответственно, так что оба ее собственных значения положительны.) Мы дадим закон преобразования относительно $\mathscr{P}_+^\uparrow$, построив представление неоднородной группы $SL(2, C)$:

$$(U(a, \Lambda)\Psi)_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2s}}(p) = e^{ip \cdot a} \sum_{\beta_1 \ldots \beta_{2s}} \prod_{j=1}^{2s} (A)_{\alpha_j \beta_j} \Psi_{\beta_1 \ldots \beta_{2s}}(\Lambda^{-1}p). \qquad (1\text{-}58)$$

Что оператор $U(a, \Lambda)$ оставляет инвариантным скалярное произведение, следует из тождества

$$A^* \tilde{p} A = \widetilde{A^{-1}p}. \qquad (1\text{-}59)$$

Для доказательства (1-59) см. (1-17). Заметим, что в (1-58) входят только индексы без точки. Чтобы увидеть, что (1-58) описывает систему спина s, можно посмотреть на те преобразования A, которые унитарны. Такие преобразования оставляют вектор $p = (m, 0, 0, 0)$ инвариантным.

Ясно, что амплитуды состояния покоящейся частицы преобразуются под действием SU_2 по представлению $\mathscr{D}^{(s)}$ спина s, описываемому формулой (1-26), а именно в этом смысле и понимается утверждение, что система имеет спин s.

Аналогичные, но несколько отличные, законы преобразования имеют место для спина s и массы нуль. Мы отсылаем читателя к библиографии за дальнейшей информацией.

Существенной чертой этих законов преобразования является то, что они доставляют максимальный набор коммутирующих наблюдаемых. Можно взять, например, импульс **p** и компоненту момента вдоль **p**. Существование такого максимального коммутирующего набора связано с тем, что представление *неприводимо*, т. е. любой оператор, коммутирующий со всеми $U(a, \Lambda)$, есть константа, умноженная на единичный оператор.

Если закон преобразования $\{a, \Lambda\} \to U(a, \Lambda)$ состояний физической системы относительно $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$ неприводим, то мы называем ее *элементарной системой*. Элементарная система характеризуется тем, что невозможно определить, зная только $U(a, \Lambda)$, будет ли она элементарной или составной в том обычном смысле, в каком электрон элементарен, а дейтон — составной. Единственные свойства системы, которые могут быть установлены,— это ее масса и спин. Мы подчеркиваем это, вводя символ $[m, s]$ для обозначения закона преобразования (1-58). В теории элементарных частиц элементарные системы растягивают гильбертово пространство $\mathscr{H}_1$, являющееся собственным подпространством гильбертова пространства $\mathscr{H}$ теории.

Мы ожидаем, что все стабильные элементарные частицы являются элементарными системами, во всяком случае в той мере, в какой можно пренебречь специальными проблемами, возникающими из-за частиц нулевой массы. Это условие связано с так называемой инфракрасной проблемой. Частица, которая сопоставляется полю нулевой массы, окружена облаком из виртуальных частиц. Это облако может изменить ее закон преобразования, тогда она не будет иметь определенной массы. Для описания такой частицы, возможно, придется образовать волновой пакет по массе, который и будет описывать поведение облака. Это

очень интересные и важные вопросы, но мы хотим их обойти в этой книге, поэтому будем предполагать, где надо, что частицы нулевой массы отсутствуют в тех системах, которые мы будем рассматривать.

Состояния двух или более частиц; состояния рассеяния

Если заданы невзаимодействующие системы, то можно получить описание комбинированной системы, образованной из них, как из составных частей, беря произведение волновых функций. Если какие-нибудь из образующих систем тождественны, то произведение надо симметризовать или антисимметризовать в соответствии со статистикой, которой удовлетворяют тождественные системы. Эта операция определяет единственным образом закон преобразования системы. Например, две свободные скалярные частицы с массами m_1 и m_2 соответственно в комбинации имеют состояния Ψ, описываемые комплекснозначными функциями $\Psi(p_1, p_2)$, где $p_1^2 = m_1^2$, $p_2^2 = m_2^2$ и $p_1^0 \geqslant 0$, $p_2^0 \geqslant 0$. Скалярным произведением этих состояний будет:

$$(\Phi, \Psi) = \int\int d\Omega_{m_1}(p_1)\, d\Omega_{m_2}(p_2)\, \overline{\Phi}(p_1, p_2)\, \Psi(p_1, p_2),$$

а закон преобразования имеет вид

$$(U(a, \Lambda)\Phi)(p_1, p_2) = e^{i(p_1+p_2)\cdot a}\Phi(\Lambda^{-1}p_1, \Lambda^{-1}p_2).$$

Сокращенно этот закон преобразования записывается как $[m_1, 0] \otimes [m_2, 0]$. Если $m_1 = m_2 = m$ и $\Psi(p_1, p_2)$ симметричны относительно перестановок их аргументов, то в сокращенной записи закон преобразования есть $([m, 0]\otimes[m, 0])_S$. Положим $M^2 = (p_1 + p_2)^2$, тогда M будет массой комбинированной системы. Эта масса изменяется непрерывно от $m_1 + m_2$ до бесконечности при изменении относительного импульса частиц по величине от нуля до бесконечности. Амплитуда при $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ все еще зависит от относительного импульса, так что при вращении могут возникать все орбитальные моменты. Это означает, что комбиниро-

ванная система содержит подсистемы $[M, \mathfrak{l}]$ с любым целым спином $\mathfrak{l}$ и с любой массой M из континуума, простирающегося от $m_1 + m_2$ до бесконечности. Сверх того, для двухчастичных систем задание $[M, \mathfrak{l}]$ единственным образом определяет состояние, т. е. операторы инфинитезимальных трансляций и преобразования Лоренца P_μ, $M^{\mu\nu}$ образуют неприводимый набор операторов. Таким образом, каждое представление входит с кратностью единица.

Спросим теперь, что произойдет с этим законом преобразования, если элементарные системы взаимодействуют. При условии, что взаимодействие ослабевает с удалением систем друг от друга, можно ожидать, что для любых значений массы M и спина $\mathfrak{l}$ комбинированной невзаимодействующей системы найдется соответствующее состояние взаимодействующей системы.

В этом состоянии во взаимодействующей системе может происходить рассеяние, но такое состояние по-прежнему остается возможным состоянием системы с взаимодействием. С другой стороны, взаимодействие может создать новые связанные состояния, массы которых обычно считаются меньшими, чем $m_1 + m_2$, но в принципе они могут быть и бóльшими. Эти связанные состояния были бы дополнительными элементарными системами, созданными взаимодействием.

Подобные аргументы справедливы для трех и большего числа частиц. Появляется единственная новая черта: когда комбинированная система разлагается по элементарным, для каждой массы, большей суммы масс составляющих частиц, возникает бесконечное число независимых состояний с данной массой и целым спином, т. е. кратность такого представления бесконечна. Этот довод непосредственно распространяется на случай, когда комбинированные системы имеют спин.

Вот мораль из приведенного рассказа. Если бы заранее было известно, какие элементарные системы дискретной массы предсказывает теория, то можно было бы написать закон преобразования теории относительно $\mathcal{P}_+^\uparrow$. В надлежащем базисе это был бы тот же закон преобразования, что и для системы произвольного числа невзаимодействующих частиц с теми же самыми дискретными массами. Например, теория, описывающая нейтральные мезоны одного

сорта массы m, которые не образуют связанных состояний, имела бы спектр, показанный на рис. 1-3.

Другой способ выразить идею предыдущего параграфа — это сказать, что состояния рассеяния элементарных систем теории вместе с вакуумным состоянием натягивают свое гильбертово пространство. Это можно выразить подробнее несколько иным способом, следующим образом.

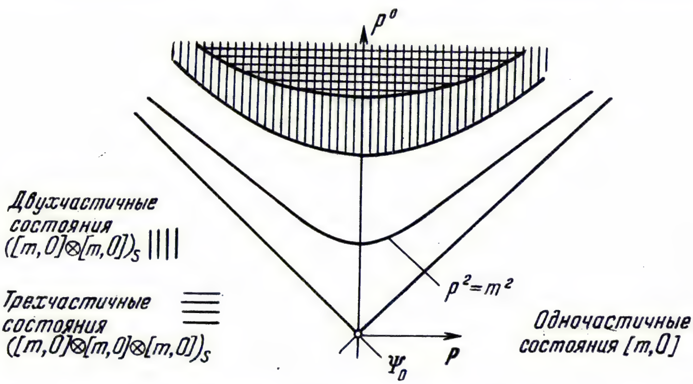

Рис. 1-3. Спектр теории нейтральных скалярных мезонов массы m без связанных состояний.

Если дано какое-то множество элементарных подсистем, то можно построить состояния, которые будут описывать эти подсистемы первоначально как разделенные, затем как сталкивающиеся и образующие расходящиеся волны из результирующих элементарных подсистем. Подобным же образом, обращая скорости, можно описать состояния с падающими волнами из результирующих систем. В пределе, когда первоначальные пакеты переходят в плоские волны, они становятся стационарными (не нормируемыми!) состояниями рассеяния. Каждое из них характеризуется импульсами и спинами элементарных подсистем из сталкивающихся пучков. Те из них, которые удовлетворяют условию падающих волн, называются *ин-состояниями*, а те, для которых выполнено условие уходящей волны, — *аут-состояниями*. Ин- и аут-состояния натягивают

гильбертовы пространства — $\mathscr{H}_{\text{in}}$ и $\mathscr{H}_{\text{out}}$ соответственно. Трансформационные свойства ин- и аут-состояний можно вывести из трансформационных свойств пучков, входящих в них, а эти последние как раз и были описаны выше. Слегка усиленной формой сделанной выше гипотезы об $U(a, \Lambda)$ будет поэтому $\mathscr{H}_{\text{in}} = \mathscr{H}_{\text{out}} = \mathscr{H}$. Обычно это называют *асимптотической полнотой*. В асимптотически полной теории оператор, переводящий аут-состояние с данными импульсами и спинами в ин-состояние с теми же импульсами и спинами, будет унитарным, если состояния нормированы. Этот оператор называется S-оператором (оператором рассеяния) теории. S-матрица задается соотношением $(\Phi^{\text{out}}, \Psi^{\text{in}}) = (\Phi^{\text{in}}, S\Psi^{\text{in}})$.

Стоит отметить, что как только принято условие асимптотической полноты, понятие *асимптотических полей* (ин- и аут-полей) тем самым уже однозначно фиксировано, независимо от того, имеем мы дело с теорией поля или нет. (Понятие поля точно будет определено в главе 3, так что здесь мы ограничимся этим кратким замечанием.) Остается только определить операторы рождения и уничтожения для ин-полей $a_r^{\text{in}}(p)^*$ и $a_r^{\text{in}}(p)$ соответственно. Действуя на ин-состояние, они отображают его соответственно на состояние, в котором на одну частицу больше (импульс частицы p, а ее спин характеризуется индексом r) или меньше. Тогда для ин-поля имеем:

$$\varphi_\alpha^{\text{in}}(x) = \int d\Omega_m(p) \Big[\sum_r \Psi_\alpha(p, r)\, e^{-ip\cdot x} a_r(p) + \\ + \sum_r \Psi_\alpha^c(p, r)\, e^{+ip\cdot x} a_r(p)^* \Big],$$

где Ψ — c-числовая спинорная величина. [Для простоты мы рассмотрели частицу, совпадающую с своей античастицей; если же это не так, то $\varphi_\alpha^{\text{in}}(x)$ не совпадает со своим зарядово сопряженным и $a_r(p)^*$ в этом выражении должно быть заменено $b_r(p)^*$, оператором рождения античастицы.] Прямо из закона преобразования ин-состояний имеем:

$$U(a, \Lambda)\, \varphi_\alpha^{\text{in}}(x)\, U(a, \Lambda)^{-1} = \sum_{\alpha'} S_{\alpha\alpha'}(A^{-1})\, \varphi_{\alpha'}^{\text{in}}(\Lambda x + a).$$

Видно также, что если множество всех ин-полей неприводимо, то операторы $U(a, \Lambda)$ могут быть записаны в виде тех же функций от ин-полей, что и в теории свободных полей. Аналогичное утверждение имеет место и для аут-полей. Из определения S-оператора следует, что $S^{-1}\varphi^{\text{in}}(x)S = \varphi^{\text{out}}(x)$.

Связь с общим анализом релятивистской инвариантности *)

В свете предыдущей дискуссии разумно допустить, что любая релятивистски инвариантная теория, состояния в которой растягиваются состояниями рассеяния элементарных систем теории, имеет в надлежащем базисе по существу однозначно определенный закон преобразования. Он тождествен закону преобразования в теории невзаимодействующих элементарных подсистем тех же масс и спинов. Любая релятивистская теория частиц, не обладающая таким законом преобразования, по нашему убеждению, требует новой физической интерпретации. (Как обычно, делая это утверждение, мы игнорируем специальные трудности, связанные с частицами нулевой массы.)

Известный интерес представляет сравнение результатов предыдущей индуктивной дискуссии с результатами общего анализа релятивистской инвариантности, основанного лишь на самых общих требованиях симметрии по отношению к $\mathscr{P}_+^\uparrow$.

Теорема 1-1 говорит нам, что в системе, для которой $\{a, \Lambda\}$ есть симметрия, существует унитарный или антиунитарный оператор $U(a, \Lambda)$, единственный с точностью до множителя на каждом когерентном подпространстве. При систематическом изучении надо исходить из соответствия между лучами и проанализировать физическое значение произвольных фаз в $U(a, \Lambda)$. Вкратце этот анализ делается так.

Предположим, что операции $\{a, \Lambda\}$ из $\mathscr{P}_+^\uparrow$ определяют симметрии. Для простоты предположим, что вероятности переходов непрерывны относительно параметров этой группы. Это означает, что если $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ — физически

*) Дальнейшие подробности можно найти в [5, 6 и 7].

реализуемые состояния и если $\Psi_{a\Lambda}$ — состояние, получаемое в результате применения операции $\{a, \Lambda\}$ к Ψ, то

$$|(\Phi, \Psi_{a\Lambda})|^2 \tag{1-60}$$

непрерывно зависит от параметров (a, Λ). Из этой гипотезы и из структуры $\mathscr{P}_+^\uparrow$ следует, что операторы $U(a, \Lambda)$ переводят когерентные подпространства сами в себя и скорее унитарны, чем антиунитарны. Чтобы это увидеть, заметим, что тождественное преобразование $U(0, 1)$ соответствует сохранению Ψ неизменным, а потому, видимо, не может переставить когерентные подпространства. То же можно сказать и о всех $\{a, \Lambda\}$, достаточно близких к единичному, в силу непрерывности (1-60). Так как $\mathscr{P}_+^\uparrow$ связно, то этот аргумент можно повторить для семейства окрестностей, ведущих к произвольному элементу $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Что $U(a, \Lambda)$ скорее унитарен, а не антиунитарен, можно увидеть, заметив, что квадрат антиунитарного оператора унитарен, а любая трансляция или чистое преобразование Лоренца могут, очевидно, быть записаны в виде квадрата.

Таким образом, в пределах когерентного подпространства инвариантность относительно $\mathscr{P}_+^\uparrow$ приводит к существованию семейства унитарных операторов U, зависящих от параметров (a, Λ). Единственность, с точностью до множителя, оператора $U(a, \Lambda)$ приводит к соотношению

$$U(a_1, \Lambda_1)\ U(a_2, \Lambda_2) = \omega(a_1, \Lambda_1; a_2, \Lambda_2)\ U(a_1 + \Lambda a_2, \Lambda_1\Lambda_2),$$

где $|\omega| = 1$. Физическое содержание этого закона преобразования не изменится, если $U(a, \Lambda)$ заменить на $e^{i\alpha(a, \Lambda)}U(a, \Lambda)$. Это приведет к замене $\omega(a_1, \Lambda_1; a_2, \Lambda_2)$ на $\exp i[\alpha(a_1, \Lambda_1) + \alpha(a_2, \Lambda_2) - \alpha(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2)]\omega$. Естественно спросить: можно ли вообще избавиться от ω с помощью подходящего выбора α? Вот хорошо известный ответ: можно сделать $\omega = \pm 1$, а заменив $\mathscr{P}_+^\uparrow$ неоднородной группой $SL(2, C)$, можно сделать $\omega = +1$ и $\{a, \Lambda\} \to$ $\to U(a, \Lambda)$ — непрерывным унитарным представлением. Процитируем без доказательства следующую теорему Вигнера.

Теорема 1-2

Любое непрерывное унитарное представление, с точностью до множителя, группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$, может быть приведено с помощью подходящего выбора фазового множителя к виду непрерывного представления $\{a, \Lambda\} \to U(a, \Lambda)$ неоднородной группы $SL(2, C)$.

Наша следующая задача — подытожить результаты математического анализа этих непрерывных унитарных представлений неоднородной группы $SL(2, C)$. Каждое непрерывное унитарное представление $\{a, \Lambda\} \to U(a, \Lambda)$ унитарно-эквивалентно представлению, разложенному на неприводимые представления. Два представления унитарно-эквивалентны, если меры, указывающие, какие неприводимые представления встречаются в разложении, дают нуль для одних и тех же подмножеств неприводимых представлений и если функции кратности, указывающие, сколько раз встречается данное неприводимое представление, совпадают. Неприводимые представления задаются несколькими параметрами, и первый из них обозначает импульсы, встречающиеся в состояниях этого представления. [Понятие энергии-импульса можно определить исключительно в терминах теории групп, поскольку каждое непрерывное унитарное представление группы трансляций имеет вид $U(a, 1) = \exp iP^\mu a_\mu$, где P^μ — коммутирующие самосопряженные операторы.] Имеется шесть случаев: $p^2 = m^2 > 0$, $p^0 \gtrless 0$; $p^2 = 0$, $p^0 \gtrless 0$; $p^2 = -m^2 < 0$ и $p = 0$. В первых двух случаях представления в точности те же, что приведены выше в обозначениях $[m, s]$, $s = 0, {}^1\!/_2, 1, {}^3\!/_2, \ldots$, а также аналогичные представления с состояниями отрицательной энергии. В двух следующих случаях имеем представления $[0, s]$ с $s = 0, \pm{}^1\!/_2, \pm 1, \ldots$, где знак $\pm$ описывает спиральность (helicity) частицы, а $|s|$ — ее спин. Например, $[0, \pm{}^1\!/_2]$ дает закон преобразования нейтрино или антинейтрино с соответствующими спиральностями, тогда как $[0, \pm 1]$ есть закон преобразования право-(лево)-циркулярно поляризованного фотона. Аналогичные представления существуют и для нулевой массы и отрицатель-

ной энергии. Существуют также другие представления для нулевой массы, но они описывают системы, спин которых бесконечен. Остальные представления имеют или мнимую массу, т. е. $p^2 < 0$, или нулевой импульс. Единственный из этих последних законов преобразования, который имеет очевидную физическую интерпретацию, есть тождественное представление. Оно представляет все преобразования Лоренца с помощью 1 на одномерном гильбертовом пространстве. Оно описывает закон преобразования вакуумного состояния.

Теперь мы в состоянии понять природу того ограничения на закон преобразования, к которому приводят предположения предыдущего раздела. Оно состоит из трех частей.

1. Не существует состояний с отрицательной энергией. Поэтому закон преобразования не имеет никаких неприводимых представлений с $m \geqslant 0$ и отрицательной энергией, а также никаких неприводимых представлений с мнимой массой.

2. Имеется единственное состояние, вакуум, с $p = 0$. Так что единственное неприводимое представление с $p = 0$, которое встречается, есть тождественное представление, и оно встречается с кратностью единица.

3. Имеется множество неприводимых представлений с определенной массой $[m_i, s_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, *таких, что все кратности других неприводимых представлений совпадают с кратностями, встречающимися в теории невзаимодействующих частиц с теми же массами и спинами.*

В третьем предположении подразумевается, что мы исключаем представления с нулевой массой и бесконечным спином, как не встречающиеся в Природе.

В большей части этой книги мы будем пользоваться лишь *1* и *2*; *3* есть жизненно необходимая часть всех более глубоких исследований теории столкновений.

Библиография

Настоящая глава посвящена тому, что иногда, и по справедливости, называют вигнеризмом: теории симметрии в квантовой механике. Оригинальные источники —

1. E. P. W i g n e r, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg Braunschweig, 1931. (Есть русский перевод: Е. В и г н е р, Тео-

рия групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.) Здесь дается общий метод анализа симметрии в квантовой механике и разрабатывается для случая группы вращений.

2. E. P. Wigner, Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik, Gött. Nach., 546—559 (1931). Здесь впервые появляется антиунитарная симметрия.
3. E. P. Wigner, Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, Ann. Math. 40, 149 (1939).
4. G. C. Wick, E. P. Wigner and A. S. Wightman, Instrinsic Parity of Elementary Particles, Phys. Rev. 88, 101 (1952). Здесь впервые появляется понятие правила суперотбора.

Обзор приложений к релятивистской квантовой механике можно найти во многих местах:

5. A. S. Wightman, Quelques problèmes mathématiques de la théorie quantique relativiste, стр. 6—11 в Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs, Centre National de la Recherche Scientifique, 1959. (Есть русский перевод: Сб. «Математика» 6, № 4, 96 (1962).)
6. A. Barut and A. S. Wightman, Relativistic Invariance and Quantum Mechanics, Nuovo Cimento Suppl. 14, 81—94 (1959).
7. A. S. Wightman, L'invariance dans la mécanique quantique relativiste, стр. 161—226 в Dispersion Relations and Elementary Particles, Wiley, New York, 1960.
8. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Part One, Harper and Row, New York, 1961. (Есть русский перевод: С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, ч. 1, 1963.)
9. B. L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932. (Есть русский перевод: Б. Л. Ван-дер-Варден, Метод теории групп в квантовой механике, Харьков, ДНТВУ, 1938.)
10. Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применения в физике, Гостехиздат, 1957.

Ссылки [5, 6, 7 и 8] содержат довольно полную сводку литературы. Тому, кто хочет добросовестно изучить эти вопросы, рекомендуем ссылку [7], где содержится множество упражнений по неоднородной группе Лоренца, которые дополнят слегка эскизное изложение, данное здесь.

Глава 2

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ АППАРАТЕ

In the thirties, under the demoralizing influence of quantum-theoretic perturbation theory, the mathematics required of a theoretical physicist was reduced to a rudimentary knowledge of the Latin and Greek alphabets.

R. Jost *)

Обобщенные функции и голоморфные функции — вот два математических понятия, в терминах которых будет выражено все, о чем пойдет речь в настоящей главе. Они обсуждаются в первых четырех разделах главы. Последний раздел посвящен нескольким замечаниям о гильбертовых пространствах.

2-1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ

Обобщенная функция — это расширение понятия *функции*, которое делает возможным уточнение различных формальных математических манипуляций, принятых у физиков. Примерами обобщенных функций являются δ-функция Дирака и ее производные; они определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \int f(x)\delta(x)\,dx &= f(0), \\ \int f(x)\delta'(x)\,dx &= -f'(0), \\ &\vdots \\ \int f(x)\delta^{(n)}(x)\,dx &= (-1)^n \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=0}, \end{aligned} \tag{2-1}$$

где $f(x)$ — какая-либо достаточно гладкая функция на действительной оси. Ясно, что $\delta(x)$ не является функцией [ведь она должна была бы $= 0$ при $x \neq 0$, откуда следовало бы (для функции δ), что $\int f(x)\delta(x)\,dx = 0$]. Это — скорее

*) В тридцатые годы, под деморализующим влиянием квантовомеханической теории возмущений, потребность физика-теоретика в математических знаниях свелась к рудиментарному владению латинским и греческим алфавитами. Р. Йост.

правило, по которому каждой достаточно гладкой функции f сопоставляется некоторое число $[f(0)]$. Насколько она должна быть гладкой, чтобы быть достаточно гладкой? Для придания смысла формуле (2-1) при всех n надо потребовать существования при $x=0$ производных от $f(x)$ всех порядков. Вообще же можно ожидать, что понятие обобщенной функции будет различным для каждого класса функций f, на котором обобщенная функция считается определенной. Функция f, для которой обобщенная функция определена, называется *основной функцией.*

Существенная черта формул, подобных формулам (2-1), состоит в том, что они определяют *линейный функционал,* т. е каждой основной функции f сопоставляется некоторое комплексное число $T(f)$, причем

$$T(\alpha f)=\alpha T(f), \qquad T(f_1+f_2)=T(f_1)+T(f_2). \tag{2-2}$$

[В этих обозначениях (2-1) запишутся как $\delta(f)=f(0)$, и т. д.]. Далее, $T(f)$ обладает свойством непрерывности в том смысле, что если f_n приближается к f, то $T(f_n)$ приближается к $T(f)$. Как раз в соответствии с тем, что имеется несколько возможных кандидатов на роль множеств основных функций, на которых может быть определена обобщенная функция, возникает возможность нескольких концепций сходимости $f_n\to f$. Если же считать, что в множестве основных функций введено какое-то определенное понятие сходимости, то *обобщенная функция определяется как непрерывный линейный функционал на основных функциях.*

В каком смысле обобщенная функция обобщает понятие функции? Если T есть функция, определенная на том же пространстве, что и основные функции, то может случиться, что произведение $T(x)f(x)$ определяет интегрируемую функцию при произвольной основной функции f и что $T(f)$, определенная как линейный функционал с помощью уравнения

$$T(f)=\int T(x)f(x)\,dx, \tag{2-3}$$

непрерывна относительно f. В этом случае функция T определяет обобщенную функцию. Обратно, мы скажем, что обобщенная функция T *есть* функция, если найдется такая

функция, что имеет место (2-3). Ясно, что при таком соответствии между обобщенными функциями и функциями не делается различия между двумя функциями, отличающимися на множестве меры нуль, так как каждая из них приведет к тому же линейному функционалу.

Большая часть терминологии теории функций может быть непосредственно перенесена на обобщенные функции. Например, существует понятие *носителя* функции T, который мы будем обозначать *) supp. T. Это — закрытое множество, являющееся дополнением наибольшего открытого множества, в котором T исчезает. Но утверждение, что T исчезает в открытом множестве $\mathcal{O}$, почти эквивалентно в случае функции утверждению, что $T(f) = 0$ для всех основных функций с носителем в $\mathcal{O}$, если основные функции настолько многочисленны, что среди них найдется достаточно много положительных функций с носителем в $\mathcal{O}$. (Мы говорим «почти эквивалентно», так как могут найтись исключительные множества меры нуль.) Итак, мы принимаем следующее определение носителя обобщенной функции T: supp T есть дополнение наибольшего открытого множества, на котором T исчезает. T исчезает на открытом множестве, если она исчезает на всех основных функциях, носитель которых лежит в этом открытом множестве. Это определение придает смысл понятию исчезновения в окрестности какой-то точки, но не *в самой* точке. Для всех наших приложений адекватным будет первое определение.

За исключением двух важных результатов, в этой книге мы будем иметь дело со специальным случаем так называемых *обобщенных функций умеренного* роста. Множество основных функций в этом случае обозначается через $\mathcal{S}$ или, если хотят указать, от каких переменных зависят основные функции, через $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ или $\mathcal{S}_{x_1, \ldots, x_n}$. Здесь $\mathbf{R}^n$ означает вещественное векторное пространство n измерений, в котором определено обычное евклидово расстояние

$$|x-y| = \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right]^{1/2}.$$

*) supp T не следует путать с sup T, обозначением для наименьшей верхней грани или супремума T.

$\mathcal{S}$ состоит из всех комплекснозначных, бесконечно дифференцируемых функций f, которые вместе со всеми своими производными на бесконечности стремятся к нулю быстрее любой степени евклидова расстояния. Это последнее требование можно записать в явном виде, если воспользоваться следующим обозначением. Пусть k обозначает совокупность целых положительных чисел $k_1, \ldots, k_n$, тогда под x^k будем понимать произведение, даваемое равенством

$$x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}. \tag{2-4}$$

Через D^k обозначим дифференциальный оператор вида

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1} \ldots (\partial x_n)^{k_n}}, \tag{2-5}$$

где $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Определим теперь

$$\|f\|_{r,\,s} = \sum_{\substack{k \\ |k| \leqslant r}} \sum_{\substack{l \\ |l| \leqslant s}} \sup_x |x^k D^l f(x)|. \tag{2-6}$$

Для каждой пары неотрицательных чисел r и s и для каждой бесконечно дифференцируемой функции f эта формула дает для $\|f\|_{r,\,s}$ или какое-то неотрицательное вещественное число, или $+\infty$. Если $\|f\|_{r,\,s} = 0$ для какой-нибудь пары r, s, то $f = 0$, так как из первого равенства следует, что $\sup_x |f(x)| = 0$. Далее $\|\alpha f\|_{r,\,s} = |\alpha|\, \|f\|_{r,\,s}$ и $\|f + g\|_{r,\,s} \leqslant \leqslant \|f\|_{r,\,s} + \|g\|_{r,\,s}$, так что $\|\ \|_{r,\,s}$ есть *норма. Класс $\mathcal{S}$ есть множество всех бесконечно дифференцируемых функций f таких, что*

$$\|f\|_{r,\,s} < \infty$$

для всех целых r, s. Совершенно очевидно, что это определение эквивалентно предыдущему.

Для определения сходимости в $\mathcal{S}$ также используется норма $\|\ \|_{r,\,s}$. Последовательность f_n в $\mathcal{S}$ сходится к f в $\mathcal{S}$, если для любых r и s

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{r;\,s} = 0. \tag{2-7}$$

Этот механизм дает четкую формулировку определения обобщенных функций умеренного роста. Обобщенная

функция умеренного роста T есть линейный функционал, определенный на $\mathcal{S}$ и имеющий свойство: если

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{r,s} = 0 \text{ для всех } r,\ s,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} |T(f_n) - T(f)| = 0. \tag{2-8}$$

Точно так же как в случае функции F действительного переменного, существуют альтернативные формы определения непрерывности. В случае функции требование

$$\text{из } x_n \to x \text{ следует } F(x_n) \to F(x)$$

эквивалентно такому: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\text{из } |y - x| < \delta \text{ следует } |F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

Вот аналог второй альтернативы для обобщенных функций: обобщенная функция умеренного роста T непрерывна в f, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие целые r, s и $\delta > 0$, что

$$\text{из } \|g - f\|_{r,s} < \delta \text{ следует } |T(g) - T(f)| < \varepsilon. \tag{2-9}$$

Мы будем пользоваться той из эквивалентных формулировок (2-8) или (2-9), которая в данном случае удобней.

Выполнение (2-8) или (2-9) можно обеспечить, если потребовать, чтобы для какой-нибудь пары неотрицательных целых r, s существовала константа C такая, что

$$|T(f)| \leqslant C\|f\|_{r,s}. \tag{2-10}$$

[Тогда ясно, что

$$|T(f_n) - T(f)| = |T(f_n - f)| \leqslant C\|f_n - f\|_{r,s}.]$$

В действительности же это условие (2-10) не только достаточно для непрерывности T, но и необходимо, что можно легко доказать, пользуясь линейностью T. [Мы не станем этот факт доказывать, но будем им пользоваться; это — теорема (5-1), стр. 25, лекций Гординга — Лионса [3]. Полностью аналогичное утверждение для операторов в гильбертовом пространстве доказывается в разделе 2-6.] Между прочим, из (2-10) следует, что линейный функцио-

нал будет непрерывен во всех точках f из $\mathcal{S}$, если только он непрерывен в $f=0$.

Существует важный класс линейных функционалов, удовлетворяющих условию непрерывности (2-10) очевидным образом:

$$T(f)=\sum_{0\leqslant|k|\leqslant s}\int F_k(x_1,\ldots,x_n)D^kf(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \tag{2-11}$$

где F_k — непрерывные функции, ограниченные следующим образом:

$$|F_k(x)|\leqslant C_k(1+|x|^j) \tag{2-12}$$

с некоторыми C_k и j, зависящими от k. Отсюда, очевидно, следует, что

$$|T(f)|\leqslant C\|f\|_{r,\,s}$$

для каких-то C и r, s, так что T есть обобщенная функция умеренного роста. Она записывается обычно в символическом виде, получаемом с помощью интегрирования по частям:

$$T(x)=\sum_{0\leqslant|k|\leqslant s}(-1)^{|k|}D^kF_k(x). \tag{2-13}$$

Вообще же эту формулу нельзя понимать буквально, так как ни F_k не обязаны быть дифференцируемыми, ни D^kF_k — интегрируемыми.

Можно показать, что *любая* обобщенная функция умеренного роста может быть записана в виде (2-11). Мы не будем здесь доказывать этот результат. (Это делается в упражнении на стр. 28 лекций Гординга — Лионса.) Отметим только, что читатель с утилитарным складом ума может принять (2-11) за *определение* того, что понимается под обобщенной функцией умеренного роста, и это нигде в последующем не приведет его к ошибке.

Ясно, что обобщенные функции умеренного роста сильно ограничены в двух отношениях. Эти ограничения грубо можно описать так: обобщенная функция умеренного роста при $x\to\infty$ в худшем случае растет как полином и порядок этого полинома в худшем случае конечен. Первое означает,

по существу, что имеют место неравенства (2-12), а (2-11) содержит лишь конечное число членов, второе же означает, что $\mathcal{D}^k$ входят в (2-11) лишь до некоторого максимального $|k|$. Конечно, можно дать точные определения полиномиального роста и порядка, но нам они не понадобятся.

Единственные обобщенные функции, не являющиеся функциями умеренного роста, с которыми мы встретимся в этой книге,— это элементы $\mathcal{D}'$, т. е. непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathcal{D}$ всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем *). Понятие сходимости в $\mathcal{D}$ таково: $f_n \to f$ в $\mathcal{D}$, если носители f_n лежат в каком-то фиксированном компактном множестве K и $f_n \to f$ равномерно в K, а производные f_n приближаются к производным f равномерно в K.

Ясно, что каждый элемент $\mathcal{D}$ является также элементом $\mathcal{S}$, так что каждый элемент $\mathcal{S}'$ определен на элементах $\mathcal{D}$. Далее, последовательность элементов $\mathcal{D}$, сходящаяся в $\mathcal{D}$ к какому-то элементу $\mathcal{D}$, конечно сходится в $\mathcal{S}$ к тому же элементу. Поэтому $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ или, на обычном языке, обобщенные функции умеренного роста являются обобщенными функциями. Однако в $\mathcal{D}'$ есть много элементов, которые не принадлежат $\mathcal{S}'$. Как пример возьмем обычные непрерывные функции экспоненциального роста. В качестве другого примера рассмотрим

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(x-n).$$

После применения к любой основной функции из $\mathcal{D}$ бесконечная сумма становится конечной. Здесь, однако, нет ограничений на порядок производной, если носитель основной функции смещается к бесконечности; элементы $\mathcal{D}'$ не обязаны иметь конечный порядок.

---

*) Напомним, что множество S компактно, если выполнено условие: для любой системы $\{\mathcal{O}_i\}$ открытых множеств такой, что $x \in S$ влечет за собой $x \in \mathcal{O}_i$ хотя бы для одного i, существует конечное ее подмножество, обладающее тем же свойством. Короче, S компактно, если каждое открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. В случае множеств в евклидовом пространстве множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Как в $\mathcal{S}'$, так и в $\mathcal{D}'$ можно определить то, что понимается под *сходимостью последовательности* T_n *обобщенных функций к обобщенной функции* $T: T_n \to T$, если для любой основной функции f $T_n(f) \to T(f)$ как комплексные числа. Конечно, понятия сходимости не совпадают, так как основные функции различны. Вот типичный пример сходимости обобщенных функций, встречающийся на практике. Допустим, что для каждого n τ_n — некоторое непрерывное отображение основных функций в основные функции, причем $\tau_n(f) \to \tau(f)$ для любой основной функции f, где $\tau(f)$ — какое-то другое непрерывное отображение основных функций в самих себя. Тогда полагаем для фиксированной обобщенной функции V: $T_n(f) = V[\tau_n(f)]$ и $T(f) = V[\tau(f)]$. Тогда $T_n \to T$.

Понятие сходимости последовательности обобщенных функций можно трактовать более систематическим образом, если $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ охарактеризовать как топологические векторные пространства. (По существу, мы уже сделали это для $\mathcal{S}$, введя семейство норм $\| \quad \|_{r, s}$.) Мы отсылаем читателя по поводу полного развития этой точки зрения к ссылкам [1, 2 и 3]. Здесь же мы сделаем лишь три замечания в этом направлении, которые будут существенны для нашего дальнейшего изложения. Первое — это, что $\mathcal{S}$ и $\mathcal{D}$ как топологические пространства *сепарабельны*.

Требуемую плотную последовательность векторов можно построить так. Возьмем все полиномы по переменным $x_1, \ldots, x_n$, действительные и мнимые части коэффициентов которых — рациональные числа, и умножим их на последовательность бесконечно дифференцируемых функций, равных 1 внутри сферы радиуса n, и 0 вне сферы радиуса $n+1$. Получающееся множество счетно и в соответствии с теоремой Вейерштрасса, по которой непрерывную функцию можно аппроксимировать компактным множеством полиномов, вполне правдоподобно, что наше множество имеет любой вектор в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{D}$ своей предельной точкой. Здесь это показано не будет. (Доказательство см. в ссылке [24], стр. 373.)

Второе замечание — $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$ полны, т. е. если T_k — последовательность обобщенных функций такая, что $T_k(f)$

есть последовательность Коши действительных чисел для любой основной функции f, то существует обобщенная функция T такая, что $T_k \to T$.

Третье замечание — понятие *ограниченного множества* играет центральную роль при описании топологических векторных пространств. Множество S в топологическом векторном пространстве замкнуто, если для любой окрестности N точки 0 векторного пространства найдется такое действительное число $\lambda > 0$, что $\lambda S \subset N$. Ограниченные множества в $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{D}'$ можно охарактеризовать так. Множество $S \subset \mathcal{S}$ ограничено тогда и только тогда, когда все $\| \quad \|_{r,s}$ являются ограниченными функциями на S. Множество $S \subset \mathcal{D}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует фиксированное компактное множество K такое, что из $f \in S$ следует $\operatorname{supp} f \subset K$, и для каждого неотрицательного целого k найдется действительное число M_k такое, что $\sup_{x \in K} |D^k f(x)| \leqslant M_k$ для $f \in S$. Множество $S \subset \mathcal{S}'$ ограничено, если для каждого $f \in \mathcal{S}$ $T(f)$ ограничено при изменении T в S. Такое же утверждение справедливо, если $\mathcal{S}'$ заменить на $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}$ — на $\mathcal{D}$. В дальнейшем нам понадобится лишь следующий результат, относящийся к ограниченным множествам: сходящаяся последовательность обобщенных функций $\in \mathcal{D}'$ сходится равномерно на ограниченном множестве $\mathcal{D}$.

В разделе 2-5 мы воспользуемся этим следующим образом. У нас будет последовательность T_n обобщенных функций, сходящаяся для каждой основной функции вида $f_a(x) = f(x - a)$, где a пробегает некоторый промежуток $|a| \leqslant \rho$. Тогда, так как f_a образуют ограниченное множество в $\mathcal{D}$, будем иметь, что последовательность сходится равномерно по a. (Доказательство см. в ссылке [1], стр. 71.)

Еще одно общее замечание по поводу определения обобщенной функции. Мы провели предыдущую дискуссию для обобщенных функций, определенных на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$, где областью основных функций было все пространство $\mathbf{R}^n$. Всю дискуссию можно провести также для основных функций, определенных лишь на каком-то открытом множестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbf{R}^n$. Мы не будем здесь останавливаться на подробностях и укажем только, что элементы

$\mathcal{D}(\mathcal{O})$ бесконечно дифференцируемы и их носители — компактные подмножества $\mathbf{R}^n$, содержащиеся в $\mathcal{O}$. Непрерывные линейные функционалы $\mathcal{D}(\mathcal{O})'$ на $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ будут применяться в разделе 2-5.

Различные свойства обобщенных функций

Одним из главных соображений в пользу введения понятия обобщенной функции было желание получить класс объектов, для которых дифференцирование всегда возможно. Производная $\partial T/\partial x_j$ обобщенной функции T определяется так:

$$\frac{\partial T}{\partial x_j}(f) = -T\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right). \tag{2-14}$$

То, что (2-14) определяет обобщенную функцию, немедленно следует из данных выше определений; если последовательность f_n сходится к f в $\mathcal{S}$ (в $\mathcal{D}$), то $\partial f_n/\partial x_j$ сходится к $\partial f/\partial x_j$ в $\mathcal{S}$ (в $\mathcal{D}$). Отсюда сразу следует, что

$$D^p T(f) = (-1)^{|p|} T(D^p f). \tag{2-15}$$

Эквивалентно производную T можно определить как предел в $\mathcal{S}'$ (или $\mathcal{D}'$),

$$\lim_{a_j \to 0} (a_j)^{-1}(T_{a_j} - T), \tag{2-16}$$

где T_{a_j} есть T, транслированное по j-й координате. Вот краткое определение этого понятия. Согласно определению понятия сходимости в $\mathcal{S}'$ (или $\mathcal{D}'$), (2-16) означает, что для любой $f \in \mathcal{S}$ (или $\in \mathcal{D}$)

$$\frac{\partial T}{\partial x_j}(f) = \lim_{a_j \to 0} (a_j)^{-1}(T_{a_j} - T)(f). \tag{2-17}$$

Но это есть

$$\lim_{a_j \to 0} (a_j)^{-1}[T_{a_j}(f) - T(f)] =$$

$$= \lim_{a_j \to 0} T[a_j^{-1}(f_{-a_j} - f)] = -T\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

где

$$f_{-a_j}(x) = f[x - (0, \ldots, a_j, \ldots, 0)],$$

так как $a_j^{-1}[f_{-a_j}(x) - f(x)]$ сходится к $-\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ в $\mathscr{S}$ (или D).

Операция трансляции по j-му аргументу, использованная при этом альтернативном определении производной, представляет собой специальный случай произвольного невырожденного неоднородного линейного преобразования $\mathbf{R}^n$:

$$x \to Lx + a,$$

которое мы обозначаем $\{a, L\}$. Мы пишем для $f \in \mathscr{S}$ (или $\in \mathscr{D}$)

$$(\{a, L\}f)(x) = f(L^{-1}(x - a))$$

и определяем для обобщенных функций $\in \mathscr{S}'$ (или $\in \mathscr{D}'$)

$$T_{\{a, L\}}(f) = |\det L|^{-1}\, T(\{a, L\}f).$$

Легко убедиться, что это определяет обобщенную функцию в $\mathscr{S}$ (или $\mathscr{D}$) соответственно. Определение устроено так, что если T — функция, то

$$T_{\{a, L\}}(x) = T(Lx + a).$$

Отметим, что для $f \in \mathscr{S}$ (или $\in \mathscr{D}$)

$$\{a, L\}(\{b, M\}f) = \{a + Lb, LM\}f$$

и для $T \in \mathscr{S}'$ (или $\in \mathscr{D}'$)

$$(T_{\{a, L\}})_{\{b, M\}} = T_{\{a+Lb,\, LM\}}.$$

Инвариантность обобщенной функции относительно $\{a, L\}$ определяется, как можно было ожидать, как

$$T_{\{a, L\}} = T.$$

Частный случай преобразования этого рода встречается при рассмотрении вакуумных средних в разделе 3-3. Там входят обобщенные функции умеренного роста на $\mathbf{R}^{4n}$ и точка $\mathbf{R}^{4n}$ описывается набором n четыре-векторов $x_1, \ldots, x_n$. Вакуумные средние инвариантны

относительно линейных преобразований

$$x_1, \ldots, x_n \to x_1 + a, \ldots, x_n + a, \tag{2-18}$$

где a — произвольный действительный четыре-вектор. Это приводит к проблеме описания всех обобщенных функций умеренного роста с таким свойством инвариантности. В том специальном случае, когда обобщенная функция является функцией, очевиден ответ, что T зависит только от разностей переменных $x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n$. Это справедливо также для обобщенных функций, но требует некоторой аргументации, которую мы сейчас приведем. Во-первых, выполним неособенное линейное преобразование

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (X, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}),$$

где

$$X = n^{-1}[x_1 + \ldots + x_n]; \quad \xi_1 = x_1 - x_2, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n, \tag{2-19}$$

которое переводит данную обобщенную функцию T в обобщенную функцию T_1. Инвариантность T относительно (2-18) эквивалентна инвариантности T_1 относительно

$$X, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \to X + a, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}. \tag{2-20}$$

Эта же инвариантность эквивалентна в свою очередь свойству

$$\frac{\partial T_1}{\partial X_\mu} = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{2-21}$$

Что инвариантность относительно (2-20) приводит к (2-21), очевидно из определения (2-17) производной. Обратно, если производные по X_μ исчезают, то можно поступать следующим образом. Для фиксированного $f_0 \in \mathcal{S}$ (или $\in \mathcal{D}$) со свойством $\int f_0(X)\,dX = 1$ определим для каждого $f \in \mathcal{S}$ (или $\in \mathcal{D}$)

$$\chi(X, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = f(X, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) -$$
$$- f_0(X) \int dy f(y, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{2-22}$$

χ также принадлежит $\mathcal{S}$ (или $\mathcal{D}$) и удовлетворяет

$$\int \chi(y, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\, dy = 0. \tag{2-23}$$

Но основная функция χ, удовлетворяющая (2-23), всегда может быть записана в виде

$$\frac{\partial^4}{\partial X_0 \ldots \partial X_3} \chi_1,$$

где

$$\chi_1(X, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \int_{-\infty}^{X_0} \ldots \int_{-\infty}^{X_3} dy\, \chi(y, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}).$$

Поэтому

$$T_1(\chi) = T_1\left(\frac{\partial^4}{\partial X_0 \ldots \partial X_3} \chi_1\right) =$$

$$= -\frac{\partial T_1}{\partial X_\mu}\left(\frac{\partial^3 \chi_1}{\partial X_0 \ldots \widehat{\partial X_\mu} \ldots \partial X_3}\right) = 0,$$

и, таким образом, $T_1(f)$ может быть записано как

$$\begin{aligned} T_1(f) &= T_1\left(f_0(X) \int dy\, f(y, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \right) = \\ &= T_2\left(\int dy\, f(y, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \right). \end{aligned} \tag{2-24}$$

T_2 есть обобщенная функция от $n-1$ четыре-векторных переменных, а (2-24), очевидно, придает точный смысл уравнению

$$T(x_1, \ldots, x_n) = T_2(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \tag{2-25}$$

и решает задачу нахождения всех обобщенных функций, инвариантных относительно (2-18).

Другой операцией, которая определена для функций и естественно расширяется на обобщенные функции, является *умножение на функцию* (см. ссылку [1], гл. 5). Поставим целью определить для обобщенной функции T и функции g

$$(gT)(f) = T(gf), \tag{2-26}$$

где $(gf)(x) = g(x)f(x)$. Имея в виду, что (2-26) должно определять обобщенную функцию, мы хотим выбрать g так, чтобы gf было основной функцией, непрерывно зависящей от f. Для этого достаточно, если $f \in \mathscr{D}$, чтобы g была бесконечно дифференцируема, так как тогда $D^p(gf)$ будет линейной комбинацией произведений производных от g и от f, которая приближается к нулю в $\mathscr{D}$ вместе с f. Если же $f \in \mathscr{S}$, то произвольная бесконечно дифференцируемая функция не подойдет, так как она может расти слишком быстро. Но если g вместе со всеми своими производными полиномиально ограничена, т. е. если для любого p

$$|D^p g(x)| \leqslant |P_p(x)| \quad \text{для всех } x,$$

тогда легко видеть, что gf_n будет сходится к gf в $\mathscr{S}$, если f_n сходится к f. При этих соответственных ограничениях на g отображения $f \to gf$ пространства $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$ или $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ непрерывны и gT принадлежит $\mathscr{D}'(\mathscr{S}')$, если T принадлежит $\mathscr{D}'(\mathscr{S}')$.

К особой породе относятся те обобщенные функции умеренного роста T, которые имеют вид gT_1, где $g \in \mathscr{S}$, а T_1 — также обобщенная функция умеренного роста. Это — *быстро убывающие обобщенные функции.* Они встретятся нам снова в разделе 2-2.

Операция совершенно другого рода — умножение функции S от одного переменного на другую функцию T, зависящую от другого переменного: $S(x)T(y)$. Оно определяет *тензорное произведение*

$$(S \otimes T)(x, y) = S(x)T(y)$$

(см. [1], гл. 4). Это определение тривиально распространяется на случай, когда S и T — обобщенные функции, если только определить тензорное произведение как функционал двух переменных

$$(S \otimes T)(f, g) = S(f)T(g), \tag{2-27}$$

где f и g — основные функции. Необходимы еще дополнительные доводы, чтобы показать, что (2-27) определяет обобщенную функцию по обеим переменным сразу, так

что приобретает смысл выражение

$$(S \otimes T)(h) = \int\int h(x, y)\, dx\, dy\, S(x)\, T(y).$$

Единственность такой обобщенной функции, если она существует, следует из того, что суммы вида

$$\sum_i f_i(x) g_i(y)$$

плотны в $\mathcal{D}_{x,y}$ и $\mathcal{S}_{x,y}$. (Чтобы это доказать, можно воспользоваться функциями, описанными в связи с обсуждением сепарабельности $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$.) Существование произведения $S \otimes T$ устанавливается, если заметить, что можно вычислить последовательно

$$S_x(T_y(h(x, y))), \tag{2-28}$$

где x и y указывают на ассоциирование переменных в основной функции и в обобщенной функции, в результате чего будет получена обобщенная функция, удовлетворяющая (2-27).

Последняя нужная нам операция — это *свертка*. Она определяется для двух элементов f и g из $\mathcal{S}$ (или $\mathcal{D}$) с помощью

$$(f * g)(x) = \int f(x - \xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{2-29}$$

Нетрудно убедиться, что $f * g$ снова принадлежит $\mathcal{S}$ (или $\mathcal{D}$). Далее без труда проверяем прямо из определений, что $f * g$ непрерывно по f и g. Операция $*$ коммутативна:

$$(f * g)(x) = \int f(y)\, g(x - y)\, dy = (g * f)(x). \tag{2-30}$$

Эту операцию можно распространить на случай, когда одним из сомножителей будет обобщенная функция T, а другим — основная функция f, с помощью уравнения

$$(f * T)(h) = T(\hat{f} * h), \tag{2-31}$$

где $\hat{f}(x) = f(-x)$. Это согласуется с (2-29), если T

оказывается функцией из $\mathcal{S}$ или $\mathcal{D}$, так как

$$(f*g)(h)=\int dx\left[\int f(x-\xi)g(\xi)d\xi\right]h(x)=$$

$$=\int d\xi\left[\int dxf(x-\xi)h(x)\right]g(\xi)=$$

$$=\int d\xi\left[\int dx\hat{f}(\xi-x)h(x)\right]g(\xi)=g(\hat{f}*h).$$

Следует заметить, что (2-31) можно записать еще и по-другому:

$$(f*T)(h)=(f\otimes T)(h_1),$$

где $h_1(x, y)=h(x+y)$. Непосредственно не очевидно, что $f\otimes T$ определено на h_1, так как h_1 не принадлежит ни $\mathcal{D}$, ни $\mathcal{S}$ по x и y одновременно. Тем не менее для $f\in\mathcal{D}$ этому выражению можно придать смысл следующим образом. Пусть $\chi\in\mathcal{D}$ — функция x такая, что $\chi(x)=1$, если $x\in\operatorname{supp} f$. Тогда $(f*T)(h)=(f\chi*T)(h)=$ $=(f\otimes T)(h_2)$, где $h_2(x, y)=\chi(x)h(x+y)\in\mathcal{D}_{x,y}$ и непрерывно зависит от h. Те же аргументы, но в более изощренном виде действуют и в случае $\mathcal{S}$ (см. ссылку [1], т. II, стр. 102). Правая часть (2-31) определяет непрерывный линейный функционал h. Это следует из того, что $f*h$ есть непрерывный линейный функционал h со значениями из $\mathcal{S}$ или $\mathcal{D}$, в зависимости от того, что рассматривается.

Действительно, для $T\in\mathcal{S}'$ (или $\in\mathcal{D}'$) и $f\in\mathcal{S}$ (или $\in\mathcal{D}$) $f*T$ есть бесконечно дифференцируемая функция. Операция перехода от T к $f*T$ очень важна на практике; она известна как *регуляризация* (с помощью f). Чтобы убедиться в бесконечной дифференцируемости функции $f*T$, заметим, что $T(\hat{f}_{-x})$ бесконечно дифференцируема по x: $[\hat{f}_{-x}(\xi)=\hat{f}(\xi-x)=f(x-\xi)]$, причем эта последняя функция и $f*T$, вычисленные для основной функции h, даются равенством

$$(f*T)(h)=T(\hat{f}*h)=(T\otimes h)(\hat{f}_{-x})=$$

$$=\int T(\hat{f}_{-x})dx\,h(x).$$

Последнее уравнение законно, так как в соответствии с конструкцией (2-28) тензорного произведения оно может быть вычислено «последовательно».

Теорема Шварца о ядре

В многочисленных практических ситуациях, например в тех, которые нам встретятся в разделах 2-5 и 3-3, приходится иметь дело с *по отдельности* непрерывными мультилинейными функционалами, определенными на $\mathcal{S}$ или $\mathcal{D}$. Таковыми являются комплекснозначные функции T аргументов $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{S}$ или $\mathcal{D}$, удовлетворяющие

$$T(f_1, \ldots, \alpha f_j' + \beta f_j'', \ldots, f_k) =$$

$$= \alpha T(f_1, \ldots, f_j', \ldots, f_k) + \beta T(f_1, \ldots, f_j'', \ldots, f_k) \qquad (2\text{-}32)$$

для $j = 1, \ldots, k$; T есть обобщенная функция по каждому f_j при всех фиксированных остальных аргументах. Очевиден, конечно, способ построения таких объектов: взять обобщенную функцию G относительно всех аргументов сразу и затем специализировать ее на основных функциях, имеющих вид произведений $f(x_1, \ldots, x_k) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_k(x_k)$. Шварц сделал замечательное открытие, что других объектов, отличных от этих, не существует: любой T имеет вид $T(f_1, \ldots, f_k) = G(f_1 f_2 \ldots f_k)$. О G говорят как о ядре мультилинейного функционала. Эта терминология избрана по аналогии с теорией интегральных уравнений, где рассматриваются интегральные операторы вида $Tf(x) = \int k(x, y) f(y)\, dy$, и k носит наименование ядра T.

Единственное доказательство теоремы о ядре, имеющее достаточно элементарный характер, чтобы быть упомянутым здесь, принадлежит Гельфанду и Виленкину [5]. Оно справедливо, однако, только для $\mathcal{D}'$ и, видимо, не существует аналогичного элементарного доказательства, пригодного для $\mathcal{S}'$. Мы удовлетворимся поэтому только формулировкой теоремы.

Теорема 2-1 (*Теорема о ядре*)

Пусть T — мультилинейный функционал аргументов $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{S} \,(\in \mathcal{D})$, непрерывный по каждому из своих аргументов, при фиксированных остальных. Тогда существует единственная обобщенная функция $G \in \mathcal{S}'(\in \mathcal{D}')$ по всем переменным $f_1, \ldots, f_k$ такая, что

$$T(f_1, f_2, \ldots, f_k) = G(f_1 f_2 \ldots f_k).$$

На примерах легко видеть, что G может быть весьма сингулярна и это не отражается на поведении T ни по одному из его аргументов. В случае одной точки будет $G(x, y) = -\delta'(x-y)$. Здесь $G(f_1 f_2) = T(f_1, f_2) = \int f_1'(x) f_2(x)\, dx = -\int f_1(x) f_2'(x)\, dx$, так что $T(f_1, f_2)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по каждому из своих аргументов при фиксированном другом; а именно

$$T(x_1, f_2) = -f_2'(x_1) \quad \text{и} \quad T(f_1, x_2) = f_1'(x_2).$$

2-2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Мы определяем два линейных преобразования $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{S}$ с помощью уравнений

$$(\mathcal{F} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ip\cdot x} f(x)\, dx, \tag{2-33}$$

$$(\overline{\mathcal{F}} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ip\cdot x} f(x)\, dx. \tag{2-34}$$

Здесь $p \cdot x$ означает *невырожденное скалярное произведение*, определенное соответственно рассматриваемой проблеме. Например, это может быть евклидово скалярное произведение $p \cdot x = \sum_{j=1}^{n} p^j x^j$. В дальнейшем нам придется иметь дело исключительно со случаями, когда n кратно 4 и

$p \cdot x$ есть сумма *скалярных произведений Минковского*

$$p \cdot x = \sum_{k=1}^{n/4} \sum_{\mu, \nu=0}^{3} p_{k\mu} g^{\mu\nu} x_{k\nu},$$

где $g^{00} = 1 = -g^{jj}$, $j = 1, 2, 3$ и $g^{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$. Очевидно, интегралы равномерно и абсолютно сходятся. То же будет верно для всех интегралов, получаемых с помощью умножения на x^k или дифференцирования под знаком интеграла. Имеем, таким образом, после нескольких интегрирований по частям

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(D^k f)(p) &= (+ip)^k (\mathscr{F} f)(p), \\ \overline{\mathscr{F}}(D^k f)(p) &= (-ip)^k (\overline{\mathscr{F}} f)(p), \end{aligned} \tag{2-35}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[(-ix)^k f](p) &= D^k (\mathscr{F} f)(p), \\ \overline{\mathscr{F}}[(+ix)^k f](p) &= D^k (\overline{\mathscr{F}} f)(p). \end{aligned} \tag{2-36}$$

Из (2-35) и (2-36) немедленно следует, что $\mathscr{F}$ и $\overline{\mathscr{F}}$ непрерывны, так как, например,

$$\begin{aligned} |p^r D^s (\mathscr{F} f)(p)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \frac{e^{-ip\cdot x}}{(1+|x|^2)^t} D^r [(ix)^s f(x)] \times \right. \\ &\left. \times (1+|x|^2)^t \, dx \right| \leqslant \sup_x [|D^r (x^s f(x))| (1+|x|^2)^t] \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \frac{dx}{(1+|x|^2)^t}. \end{aligned} \tag{2-37}$$

При достаточно больших положительных t левая часть, очевидно, ограничена константой, умноженной на некоторую норму $\|f\|_{p,q}$ функции f: $\|\mathscr{F} f\|_{r,s} \leqslant C \|f\|_{p,q}$ — это то, что мы понимаем под непрерывностью в $\mathscr{S}$.

Вот решающая лемма, являющаяся, в сущности, обратной теоремой Фурье для функций в $\mathscr{S}$:

Лемма

Преобразования $\mathscr{F}$ и $\overline{\mathscr{F}}$ являются изоморфизмами $\mathscr{S}$, т. е. это взаимно однозначные непрерывные отображения $\mathscr{S}$ на все $\mathscr{S}$ такие, что обратные отображения непрерывны. На самом деле они взаимно обратны на $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}} = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F} = 1. \tag{2-38}$$

Доказательство

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ip\cdot x}\,dx\int dq\,e^{iq\cdot x}f(q), \tag{2-39}$$

который, если утверждение теоремы верно, должен равняться $f(p)$. Формально все, что нужно сделать,— это изменить порядок интегрирования и воспользоваться тем, что

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot(p-q)}dx=\delta(p-q). \tag{2-40}$$

Чтобы оправдать это, можно поступать по-разному. Мы перепишем (2-39) так:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ip\cdot x}dx\exp(-\varepsilon|x|^2)\int dq\,e^{iq\cdot x}f(q),\qquad \varepsilon>0. \tag{2-41}$$

Пока $\varepsilon>0$, интеграл существует по обеим переменным сразу, так что допустимо менять порядок интегрирования, С помощью интеграла

$$\int\exp(-\varepsilon|x|^2+ir\cdot x)\,dx=\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2}\exp(-|r|^2/4\varepsilon) \tag{2-42}$$

находим, что (2-41) равняется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}}\int\ldots\int\exp(-|p-q|^2/4\varepsilon)f(q)\,dq. \tag{2-43}$$

Стандартный прием показывает, что (2-43) есть $f(p)$. Учитывая, что вклад от области вне любой сферы $|p-q|^2=R^2$ стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, можно так оценить разность между (2-43) и $f(p)$:

$$\left|\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}}\int\limits_{|p-q|\leqslant R}\exp\left(-\frac{|p-q|^2}{4\varepsilon}\right)[f(q)-f(p)]\,dq\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{|p-q|\leqslant R}|f(q)-f(p)|\to 0\quad\text{при}\quad R\to 0. \blacksquare$$

Теперь мы можем определить операцию преобразования Фурье на $\mathcal{S}'$. Мы сделаем это так, чтобы определение согласовалось с формулой Парсеваля для функций из $\mathcal{S}$:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int g(p)\,dp\int e^{-ip\cdot x}dx\,h(x)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int dx\,h(x)\int e^{-ip\cdot x}g(p)\,dp, \qquad (2\text{-}44)$$

что непосредственно следует из законности изменения порядка интегрирования, когда подынтегральное выражение ведет себя так же хорошо, как $g(p)\,h(x)$. Уравнение (2-44) можно написать в виде

$$(\mathcal{F}h)(g)=h[\mathcal{F}(g)], \qquad (2\text{-}45)$$

если h считать элементом $\mathcal{S}'$. Это подсказывает определение для произвольного элемента T из $\mathcal{S}'$:

$$(\mathcal{F}T)(f)=T(\mathcal{F}f). \qquad (2\text{-}46)$$

Ясно, что так определенное $\mathcal{F}$ есть линейное преобразование $\mathcal{S}'$ на себя. Кроме того, $\mathcal{F}$ непрерывно на $\mathcal{S}'$, так как если $T_n\to T$ в $\mathcal{S}'$, то

$$(\mathcal{F}T_n)(f)=T_n(\mathcal{F}f)\to T(\mathcal{F}f)=(\mathcal{F}T)(f)$$

и, значит, $\mathcal{F}T_n\to\mathcal{F}T$ в $\mathcal{S}'$.

Подобные утверждения справедливы для $\overline{\mathcal{F}}$, определенного как линейное преобразование $\mathcal{S}'$ с помощью

$$(\overline{\mathcal{F}}T)(f)=T(\overline{\mathcal{F}}f). \qquad (2\text{-}47)$$

Связь между так определенными $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ дает

Теорема 2-2

$\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$, определенные на $\mathcal{S}'$ с помощью (2-46) и (2-47) соответственно, являются взаимно обратными изоморфизмами $\mathcal{S}'$, т. е. это — непрерывные линейные взаимно однозначные отображения $\mathcal{S}'$ на $\mathcal{S}'$ такие, что

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}=\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}=1 \qquad (2\text{-}48)$$

на $\mathcal{S}'$.

Доказательство

Мы уже установили, что $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ — непрерывные линейные отображения $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$. То, что они отображают $\mathcal{S}'$ на $\mathcal{S}'$, следует из соответствующего утверждения для $\mathcal{S}$: если $T \in \mathcal{S}'$, то элемент V из $\mathcal{S}'$, определяемый как

$$V(f) = T(\overline{\mathcal{F}} f),$$

обладает свойством

$$(\mathcal{F} V)(f) = T(\mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} f) = T(f),$$

так что каждый элемент из $\mathcal{S}'$ есть образ относительно $\mathcal{F}$ некоторого элемента из $\mathcal{S}'$. Аналогичный аргумент справедлив для $\overline{\mathcal{F}}$. Уравнение (2-48) является непосредственным и простым следствием определений и (2-38):

$$(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T)(f) = (\overline{\mathcal{F}}T)(\mathcal{F}f) = T(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f) = T(f),$$
$$(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T)(f) = (\mathcal{F}T)(\overline{\mathcal{F}}f) = T(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f) = T(f). \quad \blacksquare$$

Теорема 2-2 достаточна, чтобы оправдать почти все операции, которые будут проведены дальше, но читателю, незнакомому с предметом, рекомендуется доказать некоторые из следующих утверждений прямо на основании определений:

(a) $\mathcal{F}[\delta(x)] = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}$,

(b) $\mathcal{F}(\exp ik \cdot x) = (2\pi)^{n/2}\delta(p-k)$. (2-49)

(c) Уравнения (2-35) и (2-36) справедливы также для обобщенных функций умеренного роста.

Имеется еще одно свойство $\mathcal{F}$, которое понадобится в последующем: его отношение к свертке. К примеру, для функций из $\mathcal{S}$ имеем:

$$[\mathcal{F}(f*g)](k) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ik\cdot x}\,dx\left[\int f(x-\xi)g(\xi)\,d\xi\right] =$$
$$= (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ik\cdot\xi}d\xi\, g(\xi)\left[\int e^{-ik\cdot(x-\xi)}d(x-\xi)f(x-\xi)\right] =$$
$$= (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}f)(k)\,(\mathcal{F}g)(k). \quad (2\text{-}50)$$

Таким образом, кроме множителя $(2\pi)^{n/2}$, $\mathcal{F}$ превращает

свертку в произведение. Это можно распространить на свертку $f \in \mathcal{S}$ с $T \in \mathcal{S}'$:

$$[\mathcal{F}(f*T)](g) = (f*T)(\mathcal{F}g) = T(\hat{f}*\mathcal{F}g) =$$
$$= (2\pi)^{n/2} T\{\mathcal{F}[(\overline{\mathcal{F}}\hat{f})g]\} = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}T)[(\mathcal{F}f)g] =$$
$$= (2\pi)^{n/2}[(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}T)](g); \tag{2-51}$$

здесь мы воспользовались определениями (2-46) и (2-31) операций $\mathcal{F}$ и $f*T$ и элементарным тождеством $\overline{\mathcal{F}}\hat{f} = \mathcal{F}f$. Мы можем написать (2-51) так:

$$f*T = (2\pi)^{n/2}\overline{\mathcal{F}}[(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}T)]. \tag{2-52}$$

В таком виде — это первая часть следующей теоремы.

Теорема 2-3

Преобразование Фурье быстро убывающей обобщенной функции есть бесконечно дифференцируемая функция, ограниченная полиномом.

Доказательство

Остается доказать только полиномиальную ограниченность. Это следует из того, что любая обобщенная функция умеренного роста имеет вид (2-11).

2-3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Как хорошо известно, интеграл вида

$$g(x) = \int_0^\infty e^{ikx} f(k)\,dk, \tag{2.53}$$

где f, для конкретности, берется из $\mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$, представляет собой граничное значение голоморфной функции, а именно, преобразование Лапласа

$$g(x+iy) = \int_0^\infty e^{ik(x+iy)} f(k)\,dk \tag{2-54}$$

голоморфно в верхней полуплоскости $y > 0$. [Ясно, что дополнительный множитель e^{-ky} в (2-54) служит лишь для усиления сходимости и без того прекрасно сходящегося интеграла. При $y > 0$

$$\frac{dg(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} \right]$$

существует и не зависит от направления. Это один из способов определения голоморфной функции одного комплексного переменного.] В этом разделе мы изложим теоремы, обобщающие этот пример в двух направлениях. Во-первых, мы введем несколько комплексных переменных и заменим положительную ось k выпуклым конусом. Во-вторых, в качестве граничных значений мы будем рассматривать не обычные, а обобщенные функции. Обобщением верхней полуплоскости $y > 0$ оказывается так называемая труба, в которой действительные части комплексных переменных ничем не ограничены, а их мнимые части обязаны быть в конусе. Функции, голоморфные в трубе, являющиеся преобразованиями Лапласа обобщенных функций умеренного роста, исчезающих вне конуса, не произвольны, но имеют некоторые характерные свойства ограниченности. Для приложений к теории поля существенно иметь эти условия ограниченности выписанными во всех деталях.

Так как голоморфные функции нескольких комплексных переменных начали применяться в теоретической физике лишь в последние годы, то мы начнем с напоминания их определения и простейших свойств. Через $\mathbf{C}^n$ мы обозначаем n-мерное векторное пространство с комплексными скалярами. Говорят,что функция f, определенная в окрестности точки w из $\mathbf{C}^n$, *голоморфна* *) *в точке* w, если существует кратный степенной ряд

$$\sum_{k_1 \dots k_n = 0}^{\infty} a_{k_1 k_2 \dots k_n} (z_1 - w_1)^{k_1} \dots (z_n - w_n)^{k_n}, \tag{2-55}$$

который сходится для z из некоторой окрестности w и там равен $f(z)$. Так же как в случае степенного ряда одного

*) Часто говорят также *аналитическая* функция.

переменного, доказывается, что если (2-55) сходится в z, то он сходится абсолютно и равномерно для любого ζ, удовлетворяющего

$$|\zeta_j - w_j| \leqslant R_j = |z_j - w_j| - \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{для любого } \varepsilon > 0. \tag{2-56}$$

Такую область будем называть *полидиском*.

Выполняется теорема Вейерштрасса, знакомая из теории голоморфных функций одного комплексного переменного, согласно которой такой ряд можно дифференцировать почленно. Пользуясь этим, имеем:

$$a_{k_1 \ldots k_n} = \frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\partial^{|k|} f(z_1, \ldots, z_n)}{(\partial z_1)^{k_1} \ldots (\partial z_n)^{k_n}} \Bigg|_{z_1 = w_1, \ldots z_n = w_n}. \tag{2-57}$$

Так что, в частности, голоморфная функция $z_1, \ldots, z_n$ есть бесконечно дифференцируемая функция от n действительных частей z, если мнимые части положить равными нулю. Насколько специальны голоморфные функции, можно представить себе яснее, если с помощью n-кратного применения интегральной формулы Коши получить:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\zeta_1 - w_1| = R_1, \ldots} \ldots \int\limits_{|\zeta_n - w_n| = R_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)} \tag{2-58}$$

в качестве представления, справедливого для $z_1, \ldots, z_n$ в полидиске равномерной сходимости (2-55). Из него легко следует оценка

$$\frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \left| \frac{\partial^{|k|} f(z_1, \ldots, z_n)}{(\partial z_1)^{k_1} \ldots (\partial z_n)^{k_n}} \right| < \frac{C}{R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}}. \tag{2-59}$$

Эти неравенства — в сущности все, что отличает бесконечно дифференцируемые функции от голоморфных. Ни в одном известном нам физическом контексте (2-59) не является прямым физическим утверждением как таковым, но было показано, что во многих ситуациях в физике, в особенности в тех, которые будут рассмотрены в главах 3 и 4, действующие там физические законы приводят к неравенствам (2-59) для важных функций, фигурирующих в теории. Это

приводит, как мы увидим, к чрезвычайно замечательным последствиям.

Имеются два важных и связанных между собой принципа, управляющих поведением голоморфных функций одного переменного, которые справедливы также для голоморфных функций нескольких комплексных переменных: *аналитическое продолжение* и определение функции по ее значениям в *вещественной области*. Согласно первому область голоморфной функции можно продолжить единственным образом, рассматривая последовательности перекрывающихся полидисков. Конечно, вообще говоря, две разные последовательности перекрывающихся дисков приведут к разным значениям в одной и той же точке $\mathbf{C}^n$, поэтому приходится вводить риманову «поверхность» для функции, чтобы восстановить ее однозначность. В этом не возникнет необходимости ни в одном из приложений, которые мы имеем в виду. Второй принцип возникает из того факта, что все коэффициенты степенного ряда для голоморфной функции могут быть получены с помощью вычисления производных в (2-57) в направлении действительной оси. Таким образом, голоморфная функция определяется в полной комплексной окрестности какой-нибудь точки $\mathbf{C}^n$ по ее значениям в вещественной окрестности, т. е. на открытом множестве $\mathbf{R}^n$, получаемом в результате изменения только действительных частей комплексных переменных.

Важный пример однозначного определения голоморфной функции по ее значениям в вещественной окрестности встречается при изучении множеств голоморфных функций, преобразующихся по некоторому закону относительно $L_+^\uparrow$ (см. теоремы 2-11 и 3-5). В этом случае мы имеем функцию, определенную на специальной группе Лоренца, и нам надо убедиться, что ее расширение на комплексную группу Лоренца единственно. Это будет немедленно следовать из сказанного выше, если только нам удастся найти такую параметризацию группы Лоренца, что параметры, скажем $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$, вещественны и независимы для вещественной группы и комплексны и независимы для комплексной группы, а функция, о которой идет речь, голоморфна по ним. При этом требуется только, чтобы параметризация работала в некоторой окрестности N тождественного элемента, потому что параметризацию для

окрестности произвольного элемента g можно получить, умножая все элементы N на g и пользуясь той же параметризацией для окрестности gN элемента g.

В практических приложениях встретятся два вида функций:

$$F(\Lambda\zeta_1, \ldots, \Lambda\zeta_n) \tag{2-60}$$

и

$$S(\Lambda)_{\alpha\beta},$$

где F голоморфна по своим аргументам. Так как голоморфная функция от голоморфной функции голоморфна, то первая функция окажется функцией требуемого типа, если будет найдена подходящая параметризация Λ. Матрица $S(\Lambda)$ есть матрица неприводимого представления $\mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}$ группы $SL(2, C)$, где $j+k$ четно. [Тем самым эта матрица дает представление $L_+^\uparrow$, так как $\mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}(A) = \mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}(-A)$ в этом случае.] Но $\mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}(A)_{\alpha\beta}$ есть полином относительно матричных элементов A и их комплексно сопряженных, а матричные элементы A локально имеют вид аналитических функций от матричных элементов $\Lambda(A)$, так что должная параметризация Λ снова приводит к желаемому выражению. Между прочим, аналитическое продолжение дается выражением $\mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}(A, B)_{\alpha\beta}$, которое локально выражается в виде функции от матричных элементов $\Lambda(A, B)$.

Таким образом, остается дать должную параметризацию Λ. Для этого заметим, что матрица $\Lambda^\mu{}_\nu$ может быть записана в виде экспоненты от матрицы $\Sigma^\mu{}_\nu$, причем

$$\Lambda^T G \Lambda = G \text{ эквивалентно } \Sigma^T = -G\Sigma G$$

или

$$\Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}.$$

Шесть параметров Σ_{01}, Σ_{02}, Σ_{03}, Σ_{12}, Σ_{13}, Σ_{23} произвольны и вещественны для $L_+^\uparrow$ и произвольны и комплексны для $L_+(C)$, поэтому их можно взять за $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$, если только рассматривать достаточно малую окрестность тождественного элемента.

Возникает естественный вопрос, будет ли понятие вещественной окрестности иметь такое же значение, если она лежит на границе области, в которой функция голоморфна. Хорошо известно, что в случае одного комплекс-

ного переменного это так; обобщение на случай n переменных будет получено в теореме 2-17.

Имеется один полезный критерий голоморфности функции нескольких переменных, который нам неоднократно пригодится в дальнейшем.

Теорема 2-4

Пусть F — функция, определенная в некотором открытом множестве D из $\mathbf{C}^n$. Для голоморфности функции F необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна по всем переменным вместе и голоморфна по каждому переменному в отдельности.

Замечание

Эта теорема остается верной также, если опустить условие совместной непрерывности. Этот глубокий результат известен как теорема Гартогса (см. Бохнер и Мартин, глава VII). Аналог теоремы Гартогса для бесконечно дифференцируемых функций не верен; это еще одно свидетельство особого характера голоморфных функций.

Доказательство

В подходящем полидиске с центром в $w_1, \ldots, w_n$, содержащемся в D, мы можем написать (пользуясь раздельной голоморфностью) повторный интеграл

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_j - w_j| = R_j} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n} F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$

Но в силу совместной непрерывности повторный интеграл можно записать в виде кратного. Взяв разложение в ряд

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)} =$$

$$= \sum_{k_1 \ldots k_n = 0}^{\infty} \frac{(z_1 - w_1)^{k_1}}{(\zeta_1 - w_1)^{k_1+1}} \cdots \frac{(z_n - w_n)^{k_n}}{(\zeta_n - w_n)^{k_n+1}},$$

равномерно сходящийся в каждом субполидиске, и изменив порядок интегрирования и суммирования, мы получаем для F разложение в сходящийся ряд. ∎

Как и всякая непрерывная функция, голоморфная функция F, определенная на открытом множестве $\mathcal{O}$, есть обобщенная функция в $\mathcal{D}(\mathcal{O})'$:

$$F(f) = \int dx_1\, dy_1 \ldots dx_n\, dy_n\, f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) F(z_1, \ldots, z_n),$$

где f — какая-то основная функция с носителем, лежащим в $\mathcal{O}$. При доказательстве теоремы об острие клина в разделе 2-5 нам надо будет знать связь между сходимостью в $\mathcal{D}(\mathcal{O})'$ и равномерной сходимостью на компактных множествах для последовательности голоморфных функций F_k, $k = 1, 2, \ldots$ Ответ прост: оба понятия тождественны. Ясно, что так как последовательность голоморфных F_k, равномерно сходящаяся на компактных подмножествах $\mathcal{O}$, сходится к функции F, голоморфной в $\mathcal{O}$, то

$$F_k(f) \to F(f) \tag{2-61}$$

для $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. Обратно, если $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(f)$ существует для всякой $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, то можно кратную формулу Коши

$$F_k(w_1, \ldots, w_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \ \ldots \int_0^{2\pi} d\theta_n F_k(w_1 + R_1 e^{i\theta_1}, \ldots, w_n + R_n e^{i\theta_n})$$

размыть по радиусам $R_1, \ldots, R_n$ с помощью бесконечно дифференцируемой функции g, носитель которой лежит на произведении положительных вещественных полуосей достаточно близко от нуля, причем

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty R_1\, dR_1 \ldots R_n\, dR_n\, g(R_1, \ldots, R_n) = 1.$$

Тогда

$$F_k(w_1, \ldots, w_n) = F_k(f_w),$$

где

$$f_w(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (2\pi)^{-n} g(|z_1 - w_1|, \ldots, |z_n - w_n|).$$

Но $f_w \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, так что из сходимости в $\mathcal{D}(\mathcal{O})'$ следует сходимость $F_k(w_1, \ldots, w_n)$ в каждой точке $w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{O}$. Далее, так как при изменении $w_1, \ldots, w_n$ в достаточно малом компактном множестве K f_w принимает значения из ограниченного множества в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, то сходимость будет равномерной на K. Предельная функция F поэтому голоморфна. Это завершает наши общие замечания о голоморфных функциях. Обратимся теперь к определению и свойствам преобразования Лапласа.

Если T — обобщенная функция в $\mathcal{D}'_p$, то может оказаться, что выражение $e^{-p \cdot \eta} T$, наверняка являющееся обобщенной функцией в $\mathcal{D}'$, будет также обобщенной функцией в $\mathcal{S}'$. В этом случае мы можем определить *преобразование Лапласа* T как обобщенную функцию из $\mathcal{S}'_\xi$, даваемую соотношением

$$\mathcal{L}(T) = \mathcal{F}(e^{-p \cdot \eta} T). \tag{2-62}$$

На самом деле $\mathcal{L}(T)$ параметрически зависит от η, но мы не будем указывать это явно. Для функции T определение (2-62) переходит в

$$\mathcal{L}(T)(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ip \cdot (\xi - i\eta)} T(p)\, dp. \tag{2-63}$$

Соглашение о знаках в преобразовании Фурье, которым мы здесь воспользовались, приводит в экспоненте к $\xi - i\eta$, а не к $\xi + i\eta$. Это — результат наших усилий придерживаться обычных физических обозначений, принятых в главах 3 и 4. Чтобы это определение имело смысл, носитель T не обязан обладать какими-то специальными свойствами. Например, если $T(p) = \exp(-|p|^2)$, то преобразование Лапласа наверняка существует при всех η. Таким образом, мы имеем дело с тем, что̀ иногда называют двусторонним преобразованием Лапласа, для которого одностороннее преобразование (2-53) — частный случай.

Первый факт относительно значений η, для которых $\mathcal{L}(T)$ существует, дается теоремой 2-5.

Теорема 2-5

Пусть T — обобщенная функция из $\mathcal{D}'_p$. Множество всех η таких, что $e^{-p\cdot\eta}T$ принадлежит $\mathcal{S}'_p$, выпукло.

Доказательство

Предположим, что $e^{-p\cdot\eta'}T$ и $e^{-p\cdot\eta''}T$ принадлежат $\mathcal{S}'_p$. Пусть $\eta = t\eta' + (1-t)\eta''$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Определим бесконечно дифференцируемую функцию a:

$$a(p) = \exp(-p\cdot\eta)[\exp(-p\cdot\eta') + \exp(-p\cdot\eta'')]^{-1}. \quad (2\text{-}64)$$

Такая a ограничена. [Для любых двух действительных положительных чисел из $c < d$ следует $c^t < d^t$ и, значит, $c < c^t d^{(1-t)} < d$. Применяя это к $e^{-p\cdot\eta'}$ и $e^{-p\cdot\eta''}$, имеем $0 < a(p) \leqslant 1$.] Ограничены также все частные производные a по p. Действительно, они являются либо линейными комбинациями произведений вида (2-64), либо аналогичными функциями, в которых η заменено на η' или η''. Следовательно, тождество

$$\exp(-p\cdot\eta)T = a[\exp(-p\cdot\eta')T] + a[\exp(-p\cdot\eta'')T]$$

выражает $\exp(-p\cdot\eta)T$ в виде суммы двух обобщенных функций в $\mathcal{S}'_p$.

Теорема 2-5 показывает, что определение (2-62) преобразования Лапласа ассоциирует с каждым $T \in \mathcal{D}'$ выпуклое множество значений η (возможно пустое!), для которых преобразование Лапласа существует. Возьмем теперь данное множество Γ значений η и посмотрим, какие обобщенные функции T могут иметь преобразования Лапласа, определенные для $\eta \in \Gamma$.

Теорема 2-6

Пусть Γ — выпуклое открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и T — обобщенная функция $\in \mathcal{D}'_p$ такая, что $e^{-p\cdot\eta}T \in \mathcal{S}'_p$ для всех $\eta \in \Gamma$. Тогда $\mathcal{L}(T)$ — голоморфная функция от $\xi - i\eta$ для всех $\xi - i\eta$, лежащих в трубе $\mathbf{R}^n - i\Gamma$. $\mathcal{L}(T)$

удовлетворяет условию ограниченности

$$|\mathscr{L}(T)(\xi - i\eta)| \geqslant |P_K(\xi)| \qquad (2\text{-}65)$$

с некоторым полиномом P_K, а η может изменяться в любом компактном подмножестве K из Γ.

Обратно, любая функция, голоморфная в трубе $\mathbf{R}^n - i\Gamma$ и удовлетворяющая (2-65) с некоторым полиномом P_K для любого компактного подмножества K из Γ, есть преобразование Лапласа однозначно определяемой обобщенной функции $T \in \mathscr{D}'_p$ такой, что $e^{-p \cdot \eta} T \in \mathscr{L}'_p$ для всех $\eta \in \Gamma$.

Замечания

1. Ясно, что труба есть подмножество $\mathbf{C}^n$ с особым свойством трансляционной инвариантности: она инвариантна относительно вещественных трансляций. Вместо этого в математической литературе обозначения вводятся так, что инвариантность бывает относительно чисто мнимых трансляций. Это, разумеется, дело соглашения.

2. В случае одного комплексного переменного $\xi - i\eta$, когда Γ — конус $\eta > 0$, теорема относится к голоморфным функциям в нижней полуплоскости. Тогда условие ограниченности (2-65) гласит, что голоморфная функция ограничена полиномом $P_{a,b}(\xi)$ в любой горизонтальной полоске вида $0 < a \leqslant \eta \leqslant b < \infty$. Так как полином может изменяться вместе с a и b, то мы не можем контролировать поведение голоморфной функции при больших η и малых η. Следующие два примера иллюстрируют этот пункт:

$$e^{-z^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikz} e^{-k^2/2} \qquad (2\text{-}66)$$

и

$$\sqrt{\pi}\, \frac{e^{i/4z}}{\sqrt{-iz}} = \int_0^{\infty} dk\, e^{ikz} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{k}}{\sqrt{k}}. \qquad (2\text{-}67)$$

Первый растет как $e^{y^2/2}$ вдоль мнимой оси, когда $y \to \infty$, тогда как второй растет как $y^{-1/2} e^{1/4y}$ при $y \to 0$.

Доказательство

Наш первый шаг — показать, что если η изменяется в некотором подмножестве Γ, то $e^{-p\cdot\eta}T$ можно записать как линейную комбинацию обобщенных функций в $\mathcal{S}'_p$, каждая из которых есть произведение функции из $\mathcal{S}$ на обобщенную функцию из $\mathcal{S}'$; т. е. $e^{-p\cdot\eta}T$ — быстро убывающая обобщенная функция. Преобразование Фурье такой обобщенной функции является бесконечно дифференцируемой функцией ξ согласно теореме 2-3. Ее специальный вид гарантирует также, что она бесконечно дифференцируема по ξ и η вместе. Затем мы покажем, что эта функция удовлетворяет уравнениям Коши — Римана относительно ξ и $-\eta$ и тем самым является голоморфной функцией $\xi - i\eta$ согласно теореме 2-4.

Пусть $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(l)}$ — система векторов из Γ такая, что их выпуклая оболочка H, т. е. конус векторов $\sum_{j=1}^{l} t_j\eta^{(j)}$, где $\sum_{j=1}^{l} t_j = 1$, $t_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, l$, имеет не пустую внутренность. Если η — вектор из этой внутренности, то функция

$$a(p, \eta) = \exp(-p\cdot\eta)\left[\sum_{j=1}^{l} \exp(-p\cdot\eta^{(j)})\right]^{-1} \tag{2-68}$$

ограничена по p. [Аргументация вполне аналогична использованной при доказательстве ограниченности (2-64): Если $a_i > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{l} t_i \ln a_i \leqslant \sup \ln a_i \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{l} t_i = 1,\ \ t_i \geqslant 0,\ \ i = 1, \ldots, l.$$

Поэтому $|a(p,\eta)| \leqslant 1$.] Далее, то же справедливо для всех производных по p, причем равномерно, если η остается в H. Производные $a(p, \eta)$ по p и η ограничены полиномами по p равномерно по η из H. Таким образом, написав

$$\exp(-p\cdot\eta)T = \sum_{j=1}^{l} a(p, \eta)[\exp(-p\cdot\eta^{(j)})T], \tag{2-69}$$

мы выражаем левую часть в виде линейной комбинации элементов $\mathcal{S}'_p$, а именно, произведений квадратных скобок на бесконечно дифференцируемую функцию p, все производные которой по p ограничены, а производные по η ограничены полиномиально. Этого уже хватает, чтобы показать, что преобразование Фурье функции $\exp(-p\cdot\eta)T$ есть обобщенная функция в $\mathcal{S}'_p$, дифференцируемая по η; но чтобы убедиться, что это — функция, нужны утверждения более сильные, чем (2-69).

Мы утверждаем, что для любого компактного подмножества K из Γ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\exp(\varepsilon\sqrt{1+|p|^2})\exp(-p\cdot\eta)T = T_1 \tag{2-70}$$

$\in \mathcal{S}'_p$ при всех $\eta \in K$. Для доказательства возьмем $\eta \in K$. Тогда, если ρ — действительный вектор, удовлетворяющий $|\rho| \leqslant \varepsilon$, то множество $\eta+\rho$ будет лежать в выпуклой оболочке конечного числа векторов из Γ при достаточно малом ε. Значит, для этих $\eta+\rho$ можно построить $a(p, \eta+\rho)$, как в (2-68). Если положим

$$b(p, q) = \exp[\varepsilon\sqrt{1+|p|^2}]a(p, q),$$

то при $|q-\eta| \leqslant \varepsilon$ имеем:

$$|b(p,q)| \leqslant \exp[\varepsilon(1+|p|)]|a(p,q)| \leqslant$$
$$\leqslant \exp(\varepsilon)\sup_{|\rho|\leqslant\varepsilon}\exp(-p\cdot\rho)|a(p,q)| \leqslant$$
$$\leqslant \exp(\varepsilon)\sup_{|\rho|\leqslant\varepsilon}|a(p,q+\rho)|.$$

Таким образом, $b(p, q)$ ограничено по p для всех q, достаточно близких к η. Далее, ее производные по p и q ограничены полиномами по p, так как они являются линейными комбинациями производных от $\exp(\varepsilon\sqrt{1+|p|^2})$ и от $a(p, q)$. Если напишем

$$\exp(\varepsilon\sqrt{1+|p|^2})\exp(-p\cdot\eta)T = \sum_{j=1}^{l} b(p,\eta)[\exp(-p\cdot\eta^{(j)})T],$$

то (2-70) будет выполняться лишь для η из окрестности какой-нибудь точки из K. Но в силу компактности K

его можно покрыть конечным числом таких окрестностей, а потому утверждение будет верно во всем K, если взять наименьшее из ε. Выполнение (2-70) гарантирует, что для каждого фиксированного компактного K будет $\exp(-p\cdot\eta)T = \exp(-\varepsilon\sqrt{1+|p|^2})T_1$, где T_1 принадлежит $\mathscr{S}'_p$ и изменяется в ограниченном множестве, когда η изменяется в K. Значит, $\exp(-p\cdot\eta)T$ — обобщенная функция быстрого убывания, как и утверждалось, а $\mathscr{L}(T)\ (\xi, \eta)$ — бесконечно дифференцируемая функция ξ и η. Кроме того, для $\eta\in K$

$$|\mathscr{L}(T)\ (\xi, \eta)| < |P_K(\xi)|, \tag{2-71}$$

где P_K — некоторый полином.

Но

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}\mathscr{L}(T)(\xi,\eta) = \mathscr{F}(-ip_je^{-p\cdot\eta}T) = i\frac{\partial}{\partial\eta_j}\mathscr{L}(T)(\xi,\eta),$$

а это — уравнения Коши — Римана для комплексных переменных $\xi_j - i\eta_j$, $j = 1, \ldots, n$. Так что $\mathscr{L}(T)$ — голоморфная функция $\xi - i\eta$. Этим завершается доказательство первой половины теоремы.

Обратно, допустим, что $F(\xi - i\eta)$ — голоморфная функция в трубе $\mathbf{R}^n - i\Gamma$, где Γ — открытое выпуклое множество, и предположим, что для каждого компактного подмножества K из Γ найдется полином P_K такой, что

$$|F(\xi - i\eta)| \leqslant |P_K(\xi)|, \quad \eta\in K. \tag{2-72}$$

Уравнение (2-72) позволяет утверждать, что, при любом $\eta\in\Gamma$, $F(\xi - i\eta)$ есть обобщенная функция по ξ, в силу чего можно сразу написать обобщенную функцию $\hat{F}\in\mathscr{S}'_p$ такую, что преобразование Лапласа от ее произведения на $e^{\eta\cdot p}$ будет равно F:

$$\hat{F}(p,\eta) = \overline{\mathscr{F}}_\xi[F(\xi - i\eta)].$$

Если умножим это на $e^{p\cdot\eta}$, то получим обобщенную функцию, которая не может больше принадлежать $\mathscr{S}'_p$, но должна быть в $\mathscr{D}'_p$. Если бы мы смогли показать, что

$$\frac{\partial}{\partial\eta_j}[e^{p\cdot\eta}\hat{F}(p,\eta)] = 0, \tag{2-73}$$

то можно было бы написать

$$\hat{F}(p, \eta) = e^{-p \cdot \eta} T(p), \quad T \in \mathscr{D}'_p, \tag{2-74}$$

и доказательство было бы завершено. На этом этапе, однако, мы не можем даже утверждать, что $\hat{F}(p, \eta)$ дифференцируема по η, и уж тем более — что (2-73) верно. Чтобы установить дифференцируемость, покажем, что голоморфность F и неравенство (2-72) приводят к аналогичным неравенствам для производных F.

Объясним сначала идею доказательства для случая одного переменного. В качестве компактного множества

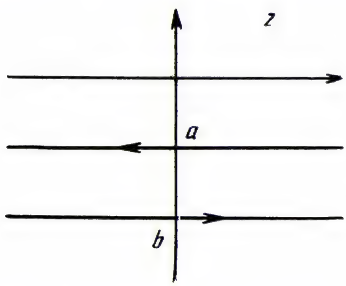

Рис. 2-1. Контур C в плоскости $z = \xi - i\eta$.

внутри трубы возьмем замкнутый интервал $0 < a \leqslant \leqslant \eta \leqslant b$. (Путем должного выбора начала координат его всегда можно поместить в нижней полуплоскости переменного $\xi - i\eta = z$.) Выберем достаточно высокую степень z^k переменной z, так чтобы $f(z) z^{-k}$ было ограничено в полосе $a \leqslant \eta \leqslant b$. Тогда с контуром C, показанным на рис. 2-1, получаем интегральное представление для $a < \operatorname{Im} z < b$

$$\frac{f(z)}{z^{k+2}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{k+2}(\zeta - z)},$$

$$\frac{df/dz}{z^{k+2}} = (k+2) \frac{f(z)}{z^{k+3}} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{k+2}(\zeta - z)^2}. \tag{2-75}$$

Из этих представлений немедленно получается, что из $|f(z)| \leqslant c|z|^k$ в нашей полосе следует $|df/dz| \leqslant d|z|^{k+2}$. Для n переменных аргументация аналогична. Берем компактное подмножество из Г, являющееся произведением n интервалов, и замечаем, что $F(z)$ $(z^{k_1} \ldots z_n^{-k_n})$ будет ограничено при достаточно больших $k_1, \ldots, k_n$ в силу (2-72). (Снова, с помощью должного выбора начала, интервалы можно взять в нижней полуплоскости.) Вместо (2-75) будет формула кратного интеграла Коши, но результат будет тот же: полиномиальная ограниченность частных производных $F(\xi - i\eta)$.

Так как отсюда в свою очередь следует дифференцируемость $\hat{F}$, то мы можем выполнить дифференцирования в (2-73):

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j}[e^{p\cdot\eta}\hat{F}(p,\eta)] = p_j e^{p\cdot\eta}\hat{F}(p,\eta) + e^{p\cdot\eta}\frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta_j}(p,\eta) =$$

$$= e^{p\cdot\eta}\mathcal{F}\left[i\frac{\partial}{\partial \xi_j}F(\xi - i\eta) + \frac{\partial F}{\partial \eta_j}(\xi - i\eta)\right] = 0.$$

Займемся теперь дальнейшими ограничениями на голоморфные функции $\mathcal{L}(T)$, проистекающими из требований, чтобы носитель T лежал в конусе и чтобы T было умеренного роста.

Сначала рассмотрим предмет эвристически. Если носитель T лежит в полупространстве $p\cdot a > A$, где a — некоторый фиксированный вектор, то для $\eta \in \Gamma$ «интеграл»

$$\int e^{-ip\cdot(\xi - i\eta)}T(p)\,dp \tag{2.76}$$

будет сходиться еще лучше, если заменить экспоненту на

$$e^{-ip\cdot(\xi-i\eta)}e^{-t(p\cdot a - B)} \text{ при } B < A,\ t \geqslant 0,$$

т. е.

$$e^{tB}\int e^{-ip\cdot[\xi - i(\eta + ta)]}\,T(p)\,dp$$

должен был бы существовать при любых $B < A$ и $t \geqslant 0$. Но это означает, что из $\eta \in \Gamma$ следует $\eta + ta \in \Gamma$ при любых $t \geqslant 0$, если только a — произвольный вектор такой, что носитель T лежит в полупространстве $p \cdot a > A$. Ко-

нечно, это утверждение будет пусто, если Γ не будет не пусто. Если T — умеренного роста, то Γ будет содержать по меньшей мере одну точку $\eta = 0$, так как для $\eta = 0$ преобразование Лапласа есть преобразование Фурье. Оно не обязано содержать никаких других точек: рассмотрим, например, $T(p) = (1 + |p|^2)^{-2n}$. Если же T умеренного роста *и в то же время* носитель T лежит в полупространстве, то комбинация предыдущей эвристической дискуссии и факта, что Γ должно быть выпукло, принуждает Γ быть конусом. Как раз эта ситуация встречается, как мы увидим, в квантовой теории поля.

Теорема 2-7

Предположим, что $T \in \mathscr{D}'_p$, а Γ (выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$) состоит из векторов η таких, что $e^{-p\cdot\eta}T \in \mathscr{S}'_p$. Если носитель T лежит в полупространстве $p \cdot a > A$, то Γ содержит все точки вида $\eta + ta$, где $\eta \in \Gamma$ и $t \geqslant 0$.

Доказательство

Пусть $\varepsilon > 0$; выберем бесконечно дифференцируемую функцию q одного переменного такую, что она равна 1 при $x \geqslant A$ и 0 при $x \leqslant A - \varepsilon$. Положим $g_\varepsilon(p) = q(p \cdot a)$. Обобщенная функция $\exp[-p\cdot(\eta + ta) + At]\,T$ принадлежит $\mathscr{D}'$, если $\eta \in \Gamma$, а ее носитель лежит в полупространстве $p \cdot a \geqslant A$, потому что то же имеет место относительно T. Сверх того, если $f \in \mathscr{D}$, $t \geqslant 0$, то выражение

$$\{\exp[-p\cdot(\eta + ta) + At]T\}(f) = \\ = [\exp(-p\cdot\eta)T]\{[\exp(-tp\cdot a + At)]g_\varepsilon f\} \qquad (2\text{-}77)$$

не зависит от g_ε, если только оно удовлетворяет указанным требованиям при каком-нибудь ε. Но правая часть (2-77) допускает расширение на $\mathscr{S}'$ по непрерывности, потому что $[\exp(-tp\cdot a + At)]g_\varepsilon f$ принадлежит $\mathscr{S}$ вместе с f и непрерывно зависит от f. Поэтому $\exp[-p\cdot(\eta + ta)]\,T \in \mathscr{S}'_p$ и, значит, $\eta + ta \in \Gamma$.

В приложениях в главах 3 и 4 T будет определяться для аргументов $p_1, \ldots, p_n$, где каждый p_j — действительный четыре-вектор, причем T обращается в нуль, если

только не все p_j лежат в или на будущем световом конусе. Эта фраза будет так часто встречаться в дальнейшем, что мы вводим символ V_+ для обозначения всех вещественных четыре-векторов, удовлетворяющих $p^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2 > 0$ и $p^0 > 0$, а также $\overline{V}_+$ для обозначения замыкания V_+, т. е. множества p, удовлетворяющих $p^2 \geqslant 0$, $p^0 \geqslant 0$. Так как в главах 3 и 4 T будет также умеренного роста, то по теореме 2-7, $\mathscr{L}(T)(\xi - ia)$ будет аналитической функцией для всех a вида $a_1, \ldots, a_n$, где $a_j \in V_+$, $j = 1, \ldots, n$. В дальнейшем труба $\mathsf{R}^n - i\Gamma$, где $\Gamma = (a_1, \ldots, a_n)$ и $a_j \in V_+$, $j = 1, \ldots, n$, будет обозначаться $\mathscr{T}_n$ и иногда называться *трубой* без дальнейших уточнений.

Преобразования Лапласа обобщенных функций с носителем в полупространстве обладают свойствами ограниченности более сильными, чем (2-72). Хотя это можно доказать для труб общего вида, особенно изящное доказательство получается для $\mathscr{T}_n$, так что мы сосредоточим свое внимание на этом случае.

Теорема 2-8

Пусть $T \in \mathscr{D}'_p$ и $e^{-p\cdot\eta}T \in \mathscr{S}'_p$ для всех $\eta \in \Gamma$. Здесь $p\cdot\eta$ обозначает $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{\mu=0}^{3} p_{j\mu}\eta_j^{\mu}$, а Γ — конус $\eta_j \in V_+$, $j = 1, \ldots, n$. Предположим, что из $p \in \operatorname{supp} T$ следует $p_j \in \overline{V}_+$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда для любого $\eta \in \Gamma$ найдется полином P_η такой, что

$$|\mathscr{L}(T)[\xi - i\,(\eta + a)]| \leqslant |P_\eta(\xi - ia)| \qquad (2\text{-}78)$$

для всех ξ и всех $a \in \Gamma$.

Обратно, если F — функция, голоморфная в $\mathscr{T}_n = \mathsf{R}^{4n} - i\Gamma$ и удовлетворяющая неравенству (2-78) для любого $\eta \in \Gamma$ и для некоторого полинома P_η, то F есть преобразование Лапласа обобщенной функции с носителем в Γ.

Доказательство

С помощью тех же самых аргументов, которые использовались в связи с (2-77), мы можем написать:

$$\{\exp[-p\cdot(\eta + a)]T\}(f) = [\exp(-p\cdot\eta)]T\{\exp[-p\cdot a]g_\varepsilon f\},$$

где g_ε — теперь функция, равная 1 в Γ и исчезающая, когда любой из ее аргументов $p_1, \ldots, p_n$ удаляется от $\overline{V}_+$ больше, чем на ε. Но из теоремы 2-6 мы знаем, что преобразование Фурье от $\exp[-p\cdot(\eta+a)]T$ есть голоморфная функция. Поэтому можно написать:

$$\mathcal{F}\{\exp[-p\cdot(\eta+a)]T\}(\xi) = \\ = (2\pi)^{-2n}[\exp(-p\cdot\eta)]T\{\exp[p\cdot(-i\xi-a)]g_\varepsilon\}.$$

Заметим, что правая часть — обобщенная функция умеренного роста, вычисленная для основной функции $\exp[p\cdot(-i\xi-a)]g_\varepsilon$, принадлежащей $\mathcal{S}$. Поэтому, по (2-10), она $\leqslant$ const $\times$ некоторую норму $\|\ \|_{r,\,s}$ этой основной функции. Но такая норма имеет вид

$$\sum_{\substack{|k|\leqslant r\\ |l|\leqslant s}} \sup_p |p^k D_p^l\{\exp[p\cdot(-i\xi-a)]\,g_\varepsilon\}|,$$

а это выражение ограничено полиномом $P(\xi-ia)$, если a принадлежит Γ и не попадает в начало координат.

Обратно, предположим, что функция F голоморфна в $\mathbf{R}^{4n}-i\Gamma=\mathcal{T}_n$ и ограничена по (2-78). Тогда она наверняка удовлетворяет (2-72) и, значит, является преобразованием Лапласа обобщенной функции $T\in\mathcal{D}'$ такой, что $e^{-p\cdot\eta}T\in\mathcal{S}'_p$ для всех $\eta\in\Gamma$. Остается показать, что носитель T лежит внутри Γ.

Возьмем основную функцию g с компактным носителем, лежащим целиком вне Γ. Тогда

$$T(g)=[e^{-p\cdot(\eta+a)}T][e^{p\cdot(\eta+a)}g]= \\ = \{\mathcal{F}[e^{-p\cdot(\eta+a)}T]\}\{\overline{\mathcal{F}}[e^{p\cdot(\eta+a)}g]\}= \\ = \int d\xi F[\xi-i(\eta+a)]\,G[\xi-i(\eta+a)]\,d\xi,$$

где

$$G(\xi-i\eta)=(2\pi)^{-2n}\int e^{ip\cdot(\xi-i\eta)}g(p)\,dp.$$

Но должным выбором a можно добиться, чтобы во всем носителе g было $p\cdot(\eta+a)<0$, а также $p\cdot(\eta+a)\to-\infty$ при $a\to\infty$. Тогда при $a\to\infty$ в Γ будет $G[\xi-i(\eta+a)]\to 0$

в $\mathscr{S}_\xi$. Поэтому

$$|T(g)| \leqslant \int d\xi |P_\eta(\xi - ia)| |G[\xi - i(\eta + a)]| \leqslant$$
$$\leqslant \int \frac{d\rho}{[1+|\rho|^2]^k} \sup_\xi [1+|\xi|^2]^k |P_\eta(\xi - ia) G[\xi - i(\eta + a)]| \to 0$$

при $a \to \infty$ для достаточно большого фиксированного k.

Уже на примере (2-67) видно, что голоморфная функция, являющаяся преобразованием Лапласа, не обязана обладать граничным значением даже в смысле теории обобщенных функций. Но если это — преобразование Лапласа обобщенной функции умеренного роста T, то граничным значением будет преобразование Фурье от T.

Теорема 2-9

Предположим, что $T \in \mathscr{S}'_p$ и $\mathscr{L}(T)$ существует для всех $\eta \in \Gamma$, как описано в теореме 2-8. Тогда

$$\lim_{\eta \to 0} \int \mathscr{L}(T)(\xi - i\eta) f(\xi) d\xi = [\mathscr{F}(T)](f), \quad (2\text{-}79)$$

т. е. $\mathscr{L}(T)$ сходится в $\mathscr{S}'_\xi$ к $\mathscr{F}(T)$ при $\eta \to 0$ внутри любого замкнутого конуса в Γ.

Обратно, если $\mathscr{L}(T)$ сходится в $\mathscr{S}'_\xi$ при $\eta \to 0$ в любом таком конусе, то T — обобщенная функция умеренного роста.

Доказательство

Первое утверждение теоремы следует прямо из (2-69) и из аргументации, приведенной в связи с этим; $\exp(-p \cdot \eta) T$ есть непрерывная функция η с значениями в $\mathscr{S}'_p$ в выпуклой оболочке любого конечного множества векторов Γ.

Обратное утверждение означает, что

$$[\lim_{\eta \to 0} \mathscr{F}(e^{-p \cdot \eta} T)](f) = \lim_{\eta \to 0} T(e^{-p \cdot \eta} \mathscr{F} f)$$

существует для любого $f \in \mathscr{S}$. Из полноты $\mathscr{S}'$ следует су-

ществование обобщенной функции умеренного роста T_1 такой, что этот предел равен $T_1(\mathcal{F}f)$. Но для $\mathcal{F}f \in \mathcal{D}$, очевидно, $T_1(\mathcal{F}\ f) = T(\mathcal{F}\ f)$. Поэтому $T_1 = T$ и T — умеренного роста. ∎

Теорема 2-9 характеризует свойства тех голоморфных функций, которые получаются с помощью преобразования Лапласа из обобщенных функций умеренного роста, но они не выражаются непосредственно в терминах $\mathcal{L}(T)$ как голоморфной функции. Последняя теорема этого раздела дает более прямую формулировку.

Теорема 2-10

Пусть $e^{-p\cdot\eta}T \in \mathcal{S}'_p$ для $\eta = 0$ и $\eta \in \Gamma$, где Γ описано в теореме 2-8. Тогда для каждого компактного подмножества K из Γ найдется полином P_K и целое r такие, что

$$|\mathcal{L}(T)(\xi - it\eta)| \leqslant \frac{P_K(\xi)}{t^r} \tag{2-80}$$

при всех ξ, всех t из $0 < t < 1$ и всех $\eta \in K$.

Обратно, если F — функция, голоморфная в $\mathcal{T}_n$ и удовлетворяющая (2-80), то $F = \mathcal{L}(T)$, где T — обобщенная функция умеренного роста.

Доказательство

Для получения (2-80) повторим частично аргументы, использованные при доказательстве теоремы 2-6. Они показывают, что можно писать $e^{-tp\cdot\eta}T$ в качестве $a(p, t\eta)T_1$, где $T_1 \in \mathcal{S}'$, а $a \in \mathcal{S}_p$ при всех $\eta \in K$, $0 < t < 1$, причем a изменяется в ограниченном множестве при изменении η. Поэтому $\mathcal{L}(T)(\xi - it\eta)$ есть обобщенная функция T_1, вычисленная на основной функции $(2\pi)^{-n/2}a(p, t\eta)e^{-ip\cdot\xi}$. Следовательно, с некоторыми целыми k, l и константой C

$$|\mathcal{L}(T)(\xi - it\eta)| \leqslant C\, \| e^{-ip\cdot\xi}a(p, t\eta) \|_{k,\,l}. \tag{2-81}$$

Прямая оценка показывает, что правая часть $\leqslant t^{-r}P_K(\xi)$ для некоторого целого r и η, изменяющегося в K.

Для проверки обратного утверждения выберем $f \in \mathcal{S}$ и изучим $\int F(\xi - it\eta) f(\xi)\, d\xi = h(t)$ как функцию t. Имеем:

$$\frac{dh}{dt}(t) = \int \sum_j \frac{\partial}{\partial(\xi - it\eta)_j} F(\xi - it\eta)(-i\eta_j) f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int F(\xi - it\eta)\, i\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi)\, d\xi,$$

$$\vdots$$

$$h^{(j)}(t) = \int F(\xi - it\eta) \left(i\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^j f(\xi)\, d\xi.$$

Значит, по (2-80),

$$|h^{(j)}(t)| \leqslant C \sup_{\xi} |P_\eta(\xi)| \left| \left(i\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^j f(\xi) \right| (1 + |\xi|^2)^k t^{-r} \tag{2-82}$$

при некотором фиксированном достаточно большом k. Но

$$h^{(j)}(t) = -\int_t^1 d\tau h^{(j+1)}(\tau) + h^{(j)}(1), \quad \text{откуда при } r > 1$$

$$|h^{(j)}(t)| \leqslant \left(\frac{1}{t^{r-1}} - 1\right) \frac{E}{r-1} + |h^{(j)}(1)|, \tag{2-83}$$

где E обозначает числитель (2-82). Последнее соотношение показывает, что $h^{(j)}(t)$ ограничено по t суммой членов, каждый из которых стремится к нулю при $f \to 0$ в $\mathcal{S}$ и имеет степень $-(r-1)$ по t. Подставив это выражение в формулу для $h^{(j-1)}(t)$, получим аналогичное утверждение, в котором степень $-(r-1)$ заменена на $-(r-2)$. Если начать этот процесс с достаточно большого j, скажем $j = r + 1$, и обобщить (2-83) на случай, когда надо интегрировать $1/\tau$, то окажется, что $h(t)$ ограничено по t суммой членов, стремящихся к нулю при $f \to 0$ в $\mathcal{S}$. Поэтому

$$\lim_{t \to 0} \int F(\xi - it\eta) f(\xi)\, d\xi$$

существует и, по теореме 2-9, F есть преобразование Лапласа обобщенной функции умеренного роста.

Мы можем подытожить результаты теорем от 2-7 до 2-10 в следующих общих словах: голоморфные функции,

являющиеся преобразованиями Лапласа обобщенных функций умеренного роста с носителями в Г, голоморфны по переменному $\xi - i\eta$ в $\mathscr{T}_n$ и полиномиально растут по η вблизи бесконечности и нуля *).

2-4. ТРУБЫ И РАСШИРЕННЫЕ ТРУБЫ

В предыдущем разделе мы видели, что преобразование Лапласа обобщенной функции умеренного роста, исчезающей вне конуса, есть граничное значение функции, голоморфной в некоторой трубе. В настоящем разделе мы рассмотрим функцию или некое множество функций, голоморфных в этой трубе и обладающих определенным законом преобразования относительно $SL(2, C)$ или, что сводится к тому же, относительно специальной группы Лоренца $L_+^\uparrow$. Мы покажем, что эти функции с необходимостью голоморфны в более широкой области, в так называемой расширенной трубе, и удовлетворяют некоему закону преобразования относительно собственной комплексной группы Лоренца $L_+(C)$.

Труба $\mathscr{T}_n$, по нашему определению, есть открытое множество комплексного $4n$-пространства $\mathbf{C}^{4n}$, задаваемое соотношениями $\eta_j \in V_+$, $j = 1, \ldots, n$, где $\zeta_j = \xi_j - i\eta_j$, $j = 1, \ldots, n$,— разбиение ζ_j на действительную и мнимую части. *Расширенная труба* $\mathscr{T}'_n$ есть объединение открытых множеств, получаемых из $\mathscr{T}_n$ в результате применения всех собственных комплексных преобразований Лоренца. Иными словами, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathscr{T}'_n$ тогда и только тогда, когда существуют $\Lambda \in L_+(C)$ и точка $w_1, \ldots, w_n \in \mathscr{T}_n$ такие, что $\zeta_1, \ldots, \zeta_n = \Lambda w_1, \ldots, \Lambda w_n$. Законы преобразования наборов голоморфных функций, которые мы будем рассматривать, имеют вид

$$\sum_\beta S(A)_{\alpha\beta} f_\beta(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = f_\alpha(\Lambda(A)\zeta_1, \ldots, \Lambda(A)\zeta_n),$$

*) Хотя все результаты раздела 2—3 совершенно справедливы, но в рассуждениях авторов есть ряд неточностей. Так, приведенное доказательство теорема 2-8 не справедливо; обратное утверждение теоремы 2-10 не точно; наконец, итоговые выводы этого раздела — тоже, строго говоря, не следуют из теорем 2-7 — 2-10. Точные доказательства всех этих утверждений смотри в § 26 книги В. С. Владимирова [26], которого мы благодарим за эти замечания. (*Прим. ред.*)

где $A \to S(A)$ — матричное представление $SL(2, C)$. В (2-84) точка $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ лежит в $\mathscr{T}_n$. В разделе 1-3, после формулы (1-25), мы отметили, что с помощью должного выбора линейных комбинаций f_β можно получить эквивалентные уравнения для линейных комбинаций, которые преобразуются по неприводимым представлениям $SL(2, C)$, так что, не теряя общности, можно с самого начала предположить, что $A \to S(A)$ — неприводимое представление, скажем $\mathscr{D}^{(j/2,\, k/2)}$. Мы немедленно приходим к выводу, что $j + k$ четно, если не все f_α нули, так как (2-84) для $A = -1$ гласит, согласно (1-26),

$$(-1)^{j+k} f_\alpha(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = f_\alpha(\zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$

Отсюда следует, что $A \to S(A)$ — представление именно $L_+^\uparrow(R)$, поскольку, если $j + k$ четно, то $S(A) = S(-A)$.

Фиксируем в (2-84) точку $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathscr{T}_n$ и станем рассматривать обе его части как функции шести вещественных параметров группы $SL(2, C)$, выбранных надлежащим образом, или, что эквивалентно, шести вещественных параметров группы Лоренца $L_+^\uparrow$. Матрица $S(A) = S[\Lambda(A)]$ представляет собой аналитическую функцию параметров, входящих в Λ. Она определена для вещественных Λ и, значит, обладает единственным аналитическим продолжением, скажем $S(A, B)$, на комплексные преобразования Лоренца $\Lambda(A, B)$ из некоторой окрестности множества вещественных $\Lambda \in L_+^\uparrow$. Здесь и в дальнейшем под окрестностью комплексного преобразования Лоренца Λ_1 будем понимать все $\Lambda \in L_+(C)$ такие, что при должной параметризации шесть параметров Λ лежат в комплексной окрестности шести параметров, определяющих Λ_1. Окрестность множества преобразований Лоренца определяется аналогично. Аналитическим продолжением правой части (2-84) будет $f_\alpha[\Lambda(A, B)\zeta_1, \ldots \ldots, \Lambda(A, B)\zeta_n]$, так что аналитически продолженным уравнением будет:

$$\sum_\beta S(A, B)_{\alpha\beta} f_\beta(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = f_\alpha[\Lambda(A, B)\zeta_1, \ldots, \Lambda(A, B)\zeta_n], \tag{2-85}$$

справедливое в некоторой комплексной окрестности любого вещественного $\Lambda \in L_+^\uparrow$, в частности, в некоторой комплексной окрестности тождества, если только $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ и $\Lambda(A, B)\zeta_1, \ldots, \Lambda(A, B)\zeta_n$ лежит в $\mathcal{T}_n$. Если $\Lambda\zeta_1, \ldots$ $\ldots, \Lambda\zeta_n$ — вне $\mathcal{T}_n$, то правая часть первоначально не определена, так что (2-85) больше не будет равенством между известными функциями. В этом случае можно попытаться использовать (2-85) для расширения области f_α вне $\mathcal{T}_n$. Мы получаем определение f_α как функции n четыре-векторов $z_1, \ldots, z_n$ во всех точках расширенной трубы $\mathcal{T}'_n$; если $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{T}'_n$, то мы определяем $f(z_1, \ldots, z_n)$ по (2-85), где $z_j = \Lambda\zeta_j$, $[\zeta_j \in \mathcal{T}_1, \Lambda \in L_+(C)]$. Если в точку $z \in \mathcal{T}'_n$ с помощью комплексных преобразований Лоренца можно попасть из двух точек $\mathcal{T}_n$, скажем ζ и w, то $f_\alpha(z_1, \ldots, z_n)$ можно через (2-85) определить двумя способами. Совсем не тривиально доказывается, что оба способа приводят к одному и тому же значению. Значит, если $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathcal{T}_n$, $w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{T}_n$ и

$$z_j = \Lambda(A_1, B_1)\zeta_j = \Lambda(A_2, B_2)w_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

то надо доказать, что

$$\sum_\beta S(A_1, B_1)_{\alpha\beta} f_\beta(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \sum_\beta S(A_2, B_2)_{\alpha\beta} f_\beta(w_1, \ldots, w_n),$$

или, что эквивалентно, пользуясь мультипликативным законом группы, что

$$f_\alpha(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \sum_\beta S(A_1{}^{-1}A_2, B_1{}^{-1}B_2)_{\alpha\beta} f_\beta(w_1, \ldots, w_n),$$
$$\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathcal{T}_n, w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{T}_n. \tag{2-86}$$

Если положить $A = A_1{}^{-1}A_2$, $B = B_1{}^{-1}B_2$, то $w_j = \Lambda(A, B)\zeta_j$ и (2-86) сведется к (2-85). Итак, однозначность будет обеспечена, если (2-85) будет справедливо для всех $\Lambda \in L_+(C)$ при $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathcal{T}_n$ и $\Lambda\zeta_1, \ldots, \Lambda\zeta_n \in \mathcal{T}_n$. Пока (2-85) доказано лишь для Λ, лежащих в некоторой окрестности $L_+^\uparrow$, т. е. для Λ почти вещественных. Главную часть доказательства, что (2-85) справедливо при всех комплексных $\Lambda \in L_+(C)$, составляет следующая лемма, иллюстрируемая рисунком 2-2.

Лемма

Допустим, что $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathscr{T}_n$ и $\Lambda\zeta_1, \ldots, \Lambda\zeta_n \in \mathscr{T}_n$, где $\Lambda \in L_+(C)$. Тогда существует непрерывная кривая из собственных комплексных преобразований Лоренца $\{\Lambda(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ такая, что $\Lambda(0) = 1$, $\Lambda(1) = \Lambda$ и $\Lambda(t)\zeta_1, \ldots, \Lambda(t)\zeta_n \in \mathscr{T}_n$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$.

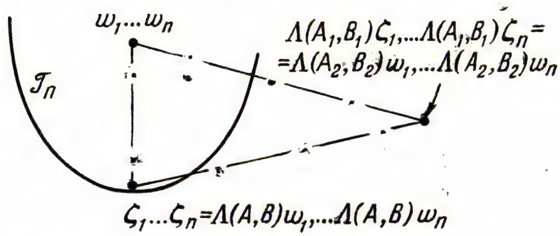

Рис. 2-2. Однозначность функций, определенных во всей расширенной трубе, следует из того, что если $w_1, \ldots, w_n$ и $\Lambda w_1, \ldots, \Lambda w_n \in \mathscr{T}_n$, то найдется кривая из собственных комплексных преобразований Лоренца $\{\Lambda(t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ с $\Lambda(0) = 1$, $\Lambda(1) = \Lambda$, такая, что $\Lambda(t)w_1 \ldots \Lambda(t)w_n \in \mathscr{T}_n$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$. Здесь $A = A_1^{-1}A_2$, $B = B_1^{-1}B_2$.

Мы докажем эту лемму немного погодя; с ее помощью может быть доказана

Теорема 2-11

Если функция $f_\alpha(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ преобразуется по (2-84) при преобразованиях из $SL(2, C)$ и голоморфна в трубе $\eta_j \in V_+$, где $\zeta_j = \xi_j - i\eta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то она обладает однозначным аналитическим продолжением в расширенную трубу $\mathscr{T}'_n$ и преобразуется по (2-85) при преобразованиях из $L_+(C)$.

Доказательство

Предположим, что $w_j = \Lambda\zeta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $\Lambda \in L_+(C)$ и $w_1, \ldots, w_n \in \mathscr{T}_n$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathscr{T}_n$, и пусть $\Lambda(t)$ — кривая в $L_+(C)$, даваемая леммой. Мы знаем, что

(2-85) справедливо для Λ из некоторой комплексной окрестности тождества, в которой содержится кусок кривой $\Lambda(t)$, скажем $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Так как $\Lambda(t_1)\zeta_1, \ldots, \Lambda(t_1)\zeta_n \in \in \mathscr{T}_n$, то мы можем применить (2-85) к некоторой комплексной окрестности $\Lambda(t_1)$ и, пользуясь групповым свойством $S(A, B)$, находим, что (2-85) справедливо для всех $\Lambda(t)$ на кривой вплоть до, скажем, $t_2 > t_1$. Продолжая дальше (известный метод аналитического продолжения с помощью перекрывающихся окрестностей), видим, после конечного числа шагов, что (2-85) верно для $\Lambda = \Lambda(1)$. Сделанные выше замечания показывают тогда, что продолжение в $\mathscr{T}'$, даваемое (2-85), однозначно. Голоморфность так определенной функции — прямое следствие тождеств

$$\frac{\partial}{\partial[\Lambda(A, B)\zeta_j]^\mu} f_\alpha(\Lambda(A, B)\zeta_1, \ldots, \Lambda(A, B)\zeta_n) =$$

$$= \sum_\alpha S(A, B)_{\alpha,\beta} \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial f_\beta(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{\partial \zeta_j^\nu} \frac{\partial \zeta_j^\nu}{\partial[\Lambda(A, B)\zeta_j]^\mu}. \blacksquare$$

Доказательство Леммы

Удобно работать с формализмом 2×2-матриц, описанным в разделе 1-3. В этом формализме $\Lambda(A, B)$ реализуется преобразованием

$$\underset{\sim}{z} \to A\underset{\sim}{z}B^T. \qquad \text{(Мы пишем } \underset{\sim}{z} \text{ вместо } \underset{\sim}{\zeta}.)$$

Можно воспользоваться инвариантностью трубы $\mathscr{T}_n$ относительно специальных вещественных преобразований Лоренца, чтобы придать A и B простую форму и тем самым сделать построение требуемой кривой особенно легким. Имеем:

$$CA\underset{\sim}{z}B^TC^* = [CA(\overline{B})^{-1}C^{-1}]C\overline{B}\underset{\sim}{z}B^TC^*.$$

При любых B, C с детерминантом 1 $\underset{\sim}{z} \to C\overline{B}\underset{\sim}{z}B^TC^*$ есть специальное вещественное преобразование Лоренца. Кроме того, с помощью подходящего выбора матрицы C квадратную скобку можно привести к одной из двух канонических

форм Жордана *)

$$K = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2-87}$$

или

$$K = \begin{Bmatrix} \exp(\alpha + i\beta) & 0 \\ 0 & \exp[-(\alpha + i\beta)] \end{Bmatrix} \quad \alpha,\ \beta \text{ вещественные.} \tag{2-88}$$

Таким образом, достаточно показать, что можно построить кривые для преобразований Лоренца $\underset{\sim}{z} \to K\underset{\sim}{z}$. Случай знака минус в (2-87) надо сразу отбросить, потому что такое K выводит вон из трубы все векторы, принадлежавшие трубе. Так, остаются два случая, для которых мы предлагаем кривые

$$K(t) = \begin{Bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2-89}$$

и

$$K(t) = \begin{Bmatrix} \exp[t(\alpha + i\beta)] & 0 \\ 0 & \exp[-t(\alpha + i\beta)] \end{Bmatrix}, 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2-90}$$

соответственно.

Рассмотрим сначала (2-89). Если написать $\underset{\sim}{z}(t) = K(t)\underset{\sim}{z}$, то будет

$$\underset{\sim}{z}(0) = \underset{\sim}{z},\ \underset{\sim}{z}(1) = \underset{\sim}{z} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{z},$$

а потому

$$\underset{\sim}{z}(t) = \underset{\sim}{z} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{z} = (1 - t)\underset{\sim}{z}(0) + t\underset{\sim}{z}(1),\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Этим показано, что $\underset{\sim}{z}(t)$ есть выпуклая линейная комбинация $\underset{\sim}{z}(0)$ и $\underset{\sim}{z}(1)$. Но $\mathscr{T}_1$ выпукло, значит, если $\underset{\sim}{z}(0) \in \mathscr{T}_1$ и $\underset{\sim}{z}(1) \in \mathscr{T}_1$, то $(1 - t)\underset{\sim}{z}(0) + t\underset{\sim}{z}(1) \in \mathscr{T}_1$. Так что кривая

*) См. P. R. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, 2nd Ed., Van Nostrand Princeton, N. Y., 1958, p. 113. (Есть русский перевод: П. Халмош, Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, 1963, стр. 151.)

$K(t)\zeta_1, \ldots, K(t)\zeta_n$ лежит в $\mathcal{T}_n$, если там лежат ее конечные точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ и $K\zeta_1, \ldots, K\zeta_n$.

Во втором случае мы снова пользуемся выпуклостью трубы, но теперь уже потребуется более изощренная аргументация. Мы воспользуемся следующим критерием принадлежности вещественного вектора открытому конусу V_+: $y \in V_+$ тогда и только тогда, когда $n \cdot y > 0$ для любого $n \in C_+$, $n \neq 0$, где C_+ — граница V_+. Это можно доказать, применяя в лоб неравенство Шварца к пространственным частям векторов. Удобны обозначения

$$y^a = y^0 + y^3, \quad y^b = y^0 - y^3,$$

в которых скалярное произведение записывается как

$$n \cdot y = \frac{1}{2}(n^a y^b + n^b y^a) - n^1 y^1 - n^2 y^2.$$

У каждого вектора $\in C_+$, очевидно, $n^a \geqslant 0$, $n^b \geqslant 0$, причем $n^a + n^b = 2n^0 > 0$, так что хотя бы одно из n^a, n^b должно быть положительно.

Напишем $\underset{\sim}{z}(t) = K(t)\underset{\sim}{z}$, $\underset{\sim}{z}(0) = \underset{\sim}{z}$, и сделаем еще одно вещественное специальное преобразование Лоренца

$$\underset{\sim}{\rho}(t) = K\left(-\frac{t}{2}\right)\underset{\sim}{z}(t)K\left(-\frac{t}{2}\right)^* =$$

$$= K\left(\frac{t}{2}\right)\underset{\sim}{z}K\left(-\frac{t}{2}\right)^*.$$

Тогда $z(t) \in \mathcal{T}_1$, если и только если $\rho(t) \in \mathcal{T}_1$. Пусть $\rho^\mu(t) = \xi^\mu(t) - i\eta^\mu(t)$. Доказательство леммы завершится, если мы покажем, что $\eta(t) \in V_+$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Чтобы получить вектор матрицы $\underset{\sim}{\rho}(t)$, вычислим

$$\underset{\sim}{\rho}(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2(\alpha+i\beta)} & 0 \\ 0 & e^{-t/2(\alpha+i\beta)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} z^a & z^1 - iz^2 \\ z^1 + iz^2 & z^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t/2(\alpha-i\beta)} & 0 \\ 0 & e^{t/2(\alpha-i\beta)} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} \rho^a(t) & \rho^1(t)-i\rho^2(t) \\ \rho^1(t)+i\rho^2(t) & \rho^b(t) \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\beta t}z^a & e^{\alpha t}(z^1-iz^2) \\ e^{-\alpha t}(z^1+iz^2) & e^{-i\beta t}z^b \end{pmatrix}$$

так что

$$\eta^a(t) = -\frac{1}{2i}(e^{i\beta t}z^a - e^{-i\beta t}\overline{z^a}) = y^a\cos\beta t - x^a\sin\beta t,$$

где $z^\mu = x^\mu - iy^\mu$. Подобным же образом, $\eta^b(t) = y^b\cos\beta t + x^b\sin\beta t$,

$$\eta^1(t) = -\frac{\operatorname{Im}}{2}[e^{\alpha t}(z^1-iz^2)+e^{-\alpha t}(z^1+iz^2)] = $$
$$= y^1\operatorname{ch}\alpha t + x^2\operatorname{sh}\alpha t,$$

$$\eta^2(t) = -\frac{\operatorname{Re}}{2}[e^{\alpha t}(z^1-iz^2)-e^{-\alpha t}(z^1+iz^2)] = $$
$$= -x^1\operatorname{sh}\alpha t + y^2\operatorname{ch}\alpha t.$$

Первый шаг доказательства — показать, что $\eta^a(t) > 0$ и $\eta^b(t) > 0$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Заметим, что так как знак $\sin\beta$ можно изменить, заменяя x^a, x^b на $-x^a$, $-x^b$, то можно без потери общности считать $0 < \beta < \pi$; $\beta = 0$ тривиально; $\beta = \pi$ невозможно, поскольку тогда $\eta^a(1) < 0$, $\eta^b(1) < 0$. Для $0 < \beta < \pi$ имеем тождество

$$(\sin\beta)\eta^a(t) = \sin[(1-t)\beta]\eta^a(0) + (\sin\beta t)\eta^a(1),$$
$$(\sin\beta)\eta^b(t) = \sin[(1-t)\beta]\eta^b(0) + (\sin\beta t)\eta^b(1).$$

Тем самым $\eta^a(t)$ и $\eta^b(t)$ выражены в виде положительных линейных комбинаций их начальных и конечных значений, что и доказывает их положительность.

Второй шаг использует упоминавшееся выше условие того, что вектор $\eta(t)$ лежит в V_+. Пусть $n \in C_+$ — какой-нибудь фиксированный светоподобный вектор. Положим

$$g(t) = n\cdot\eta(t) = f_1(t) - f_2(t),$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2}[n^a\eta^b(t) + n^b\eta^a(t)],$$

$$f_2(t) = n^1\eta^1(t) + n^2\eta^2(t),$$

или, подставляя,

$$f_1(t) = K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t,$$
$$f_2(t) = \lambda_1 e^{\alpha t} + \lambda_2 e^{-\alpha t},$$

где K_1, K_2, λ_1, λ_2 — некоторые вещественные константы. Легко видеть, что

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = -\beta^2 f_1, \qquad \frac{d^2 f_2}{dt^2} = \alpha^2 f_2,$$

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = -\beta^2 f_1 - \alpha^2 f_2 = \alpha^2 g - (\alpha^2 + \beta^2) f_1.$$

Так как $\eta(0)$, $\eta(1) \in V_+$, то $g(0) > 0$, $g(1) > 0$. Конечно, $g(t)$ — элементарная функция, и если бы было $g(t) < 0$ в интервале $(0, 1)$, то она должна была бы иметь в нем минимум; для минимума

$$\frac{d^2 g}{dt^2} \geqslant 0, \text{ т. е. } g \geqslant \frac{(\alpha^2 + \beta^2) f_1}{\alpha^2} > 0.$$

Поэтому $g(t) > 0$ в $(0, 1)$, что и доказывает лемму. ∎

Так как голоморфные функции с законом преобразования вида (2-84) имеют однозначное аналитическое продолжение в расширенную трубу, то представляет известный интерес более точная характеризация протяженности этой области. Мы не будем здесь предаваться этой игре и определим только *вещественные* точки в этой области, имеющие большое значение для теоремы *PCT*.

По самому ее определению труба $\mathcal{T}_n$ не содержит вещественных точек: $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{T}_n$ означает, что $-\operatorname{Im} z_j \in V_+$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и, стало быть, не нули. Но расширенная труба $\mathcal{T}'_n$ содержит вещественные точки, называемые обычно *точками Йоста*. Разъясним это.

Рассмотрим сначала специальный случай одного вектора. Если $\zeta \in \mathcal{T}_1$, $\zeta = \xi - i\eta$, то $\eta \in V_+$, и расширенная труба $\mathcal{T}'_1$ состоит из всех точек $\Lambda\zeta$, $\Lambda \in L_+(C)$, $\zeta \in \mathcal{T}_1$. Так как $\Lambda\zeta \cdot \Lambda\zeta = \zeta \cdot \zeta$, то значения ζ^2 для ζ из $\mathcal{T}'_1$ будут те же, что и для ζ из $\mathcal{T}_1$. Но $\zeta^2 = \xi^2 - \eta^2 - 2i\xi \cdot \eta$, поэтому если ζ^2 вещественно и $\zeta \in \mathcal{T}_1$, то ξ ортогонально времениподобному вектору и, значит, пространственноподобно. Итак, $\zeta^2 < 0$. Отсюда вещественная точка $\mathcal{T}'_1$ должна

иметь $\zeta^2 < 0$. Это условие также и достаточно, чтобы $\zeta \in \mathcal{T}'_1$; ведь если $\zeta^2 < 0$ и ζ вещественно, можно так выбрать систему координат, чтобы было $\zeta = (\zeta^0, \zeta^1, 0, 0)$, где $\zeta^1 > |\zeta^0|$; тогда комплексное преобразование Лоренца

$$\begin{aligned} \zeta^0 + \zeta^1 &\to e^{i\alpha}(\zeta^0 + \zeta^1) = \hat{\zeta}^0 + \hat{\zeta}^1, \\ \zeta^0 - \zeta^1 &\to e^{-i\alpha}(\zeta^0 - \zeta^1) = \hat{\zeta}^0 - \hat{\zeta}^1 \end{aligned} \tag{2-91}$$

даст $\hat{\zeta}^0 = i \sin \alpha\zeta^1 + \cos \alpha\zeta^0$, $\hat{\zeta}^1 = i \sin \alpha\zeta^0 + \cos \alpha\zeta^1$. Это преобразование переводит ζ в трубу, если $\alpha < 0$, так как тогда $\operatorname{Im} \hat{\zeta}^0 < -|\operatorname{Im} \hat{\zeta}^1|$. В общем случае имеем следующую теорему, принадлежащую Йосту.

Теорема 2-12

Вещественная точка $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ лежит в расширенной трубе $\mathcal{T}'_n$ тогда и только тогда, когда все векторы вида

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j, \quad \lambda_j \geqslant 0, \quad \Sigma\lambda_j > 0,$$

пространственноподобны, т. е.

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j\right)^2 < 0 \text{ для всех } \lambda_j \geqslant 0 \text{ с } \Sigma\lambda_j > 0. \tag{2-92}$$

Доказательство

Докажем сначала необходимость (2-92). По определению $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathcal{T}'_n$, если существует собственное комплексное преобразование Лоренца Λ такое, что $\Lambda\zeta_1, \ldots, \Lambda\zeta_n \in \mathcal{T}_n$. Но $(\Lambda\zeta_j)^2 = \zeta_j^2$, а, как мы видели, z^2 вещественно и $z \in \mathcal{T}_1$ возможно лишь, если $z^2 < 0$. Поэтому $\zeta_j^2 < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, $\mathcal{T}_1$ выпукло. Значит, если каждый из комплексных четыре-векторов $\Lambda\zeta_1, \ldots, \Lambda\zeta_n$ лежит в $\mathcal{T}_1$, то и любая линейная комбинация вида

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Lambda\zeta_j \text{ для } \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ \Sigma\lambda_j > 0.$$

также лежит в $\mathcal{T}_1$. Поэтому

$$\left[\Lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j\right)\right]^2 < 0,$$

что сводится к

$$\left(\sum_j \lambda_j \zeta_j\right)^2 < 0.$$

Это и доказывает необходимость (2-92). Чтобы доказать достаточность, предположим, что векторы $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ удовлетворяют (2-92). Тогда они растягивают выпуклый пространственноподобный конус K, не пересекающий ни верхнего, ни нижнего световых конусов. Мы можем найти две плоскости (α), (β), касающиеся с нижним и верхним конусами соответственно, которые отделяют K от этих конусов (рис. 2-3). Это возможно, поскольку любые два таких выпуклых множества могут быть так разделены *).

Пусть уравнениями плоскостей (α), (β) будут

$$\alpha_\mu \zeta^\mu = 0, \qquad \beta_\mu \zeta^\mu = 0,$$

α и β светоподобны и $\alpha \cdot \beta < 0$. Можно выбрать систему координат так, что будет $\alpha = (1, 1, 0, 0)$, $\beta = (-1, +1, 0, 0)$.

Для точек в V_+ $\zeta \cdot \alpha > 0$, а для точек ниже плоскости (α) $\zeta \cdot \alpha < 0$, что в выбранной системе означает

$$\zeta^0 - \zeta^1 < 0, \quad \text{если} \quad \zeta \in K.$$

Аналогично если $-\zeta \in V_+$, то $\beta \cdot \zeta > 0$ и $-\zeta^0 - \zeta^1 < 0$ для точек выше плоскости (β), т. е. для точек в K.

---

*) Вместо того чтобы опираться на это общее свойство выпуклых множеств, можно аргументировать более непосредственно. Мы знаем, что если ρ — времениподобный вектор, а ζ — пространственноподобный, то $a\rho + b\zeta$ не может быть нулем при a и b, не равных нулю одновременно. Поищем теперь решения n систем одновременных неравенств $n \cdot \rho < 0$, $n \cdot \zeta < 0$, где ρ пробегает нижний световой конус V_-, а ζ — выпуклый конус, натянутый на $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Легко видеть, что эта система неравенств *не* будет иметь решений тогда и только тогда, когда выпуклый конус, растягиваемый векторами ρ и ζ, содержит нулевой вектор. Согласно приведенному аргументу это невозможно, так что имеется хотя бы одно решение n. Тогда плоскость $n \cdot \zeta = 0$ будет разделяющей, причем легко убедиться, что одно из решений лежит в C_+, границе V_+.

Поэтому $\zeta^1 > |\zeta^0|$ для всех точек в K, в частности для данных $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Стало быть, можно применить комплексное преобразование Лоренца, которым мы пользовались выше, (2-91). Оно переведет ζ_k в верхнюю трубу, $k = 1, 2, \ldots, n$. Это показывает достаточность (2-92). ∎

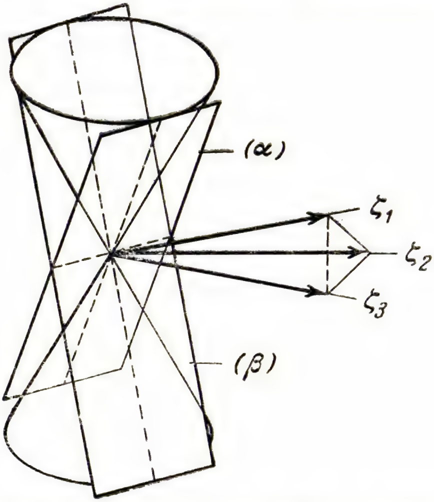

Рис. 2-3. Конус пространственноподобных векторов, соответствующих точке Йоста ζ_1, ζ_2, ζ_3. Плоскости (α) и (β) отделяют конус, натянутый на ζ_1, ζ_2, ζ_3, от внутренности положительного и отрицательного световых конусов.

Теорема 2-11 показывает, что любые функции, голоморфные в $\mathcal{T}_n$ и удовлетворяющие закону преобразования вида (2-84), обладают однозначным аналитическим продолжением в $\mathcal{T}'_n$. Ничто, однако, из сказанного до сих пор не исключает, что их можно продолжить еще дальше. Для вещественных точек теорема 2-12 наводит на простые примеры, показывающие, что такое продолжение вообще невозможно: функция

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty dK\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \frac{\rho(K, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j\right)^2 - K^2}$$

аналитична в $\mathscr{T}_n$, инвариантна относительно преобразований Лоренца, но сингулярна во всех вещественных точках, не являющихся точками Йоста, если только ρ выбрано должным образом.

Ясно, что йостовы точки из $\mathscr{T}'_n$ образуют вещественную окрестность для голоморфных функций в $\mathbf{C}^{4n}$, сак что если голоморфная функция исчезает в точках Йоста, то она исчезает везде.

В дальнейшем, при изучении перестановочных соотношений полей, мы будем заниматься не только расширенными трубами $\mathscr{T}'_n$, но также и так называемыми *переставленными расширенными трубами*. Каждому элементу группы перестановок S_{n+1} из $n+1$ объектов соответствует одна

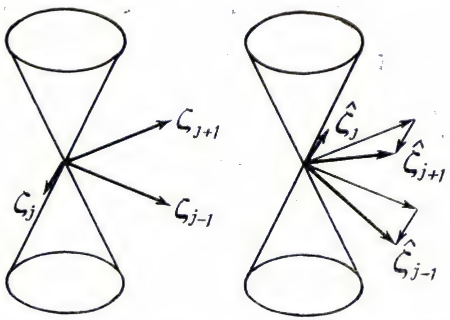

Рис. 2-4. Конфигурация векторов ζ_{j-1}, ζ_j, ζ_{j+1}, появляющихся для точек Йоста из $\mathscr{T}'_n$ и из $P(j, j+1)\ \mathscr{T}'_n$. Все $\hat{\zeta}$ получены из ζ согласно $\hat{\zeta}_{j-1} = \zeta_{j-1} + \zeta_j$, $\hat{\zeta}_j = -\zeta_j$, $\hat{\zeta}_{j+1} = \zeta_{j+1} + \zeta_j$.

из этих областей, получающаяся из $\mathscr{T}'_n$ с помощью линейного преобразования. Для дальнейшего достаточно обсудить частную область, соответствующую транспозиции j-го и $(j+1)$-го объектов. Относящееся сюда линейное преобразование обозначается $P(j, j+1)$ и определяется посредством

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_k &= \zeta_k, \quad 1 \leqslant k < j-1 \quad \text{и} \quad j+1 < k \leqslant n, \\ \hat{\zeta}_{j-1} &= \zeta_{j-1} + \zeta_j, \\ \hat{\zeta}_j &= -\zeta_j, \\ \hat{\zeta}_{j+1} &= \zeta_{j+1} + \zeta_j, \end{aligned} \tag{2-93}$$

с условием: вычеркивать уравнение, в котором ζ появляется с индексом < 1 или $> n$. Все остальные переставленные расширенные трубы можно получить из этих.

Наша цель — установить, что $\mathscr{T}'_n$ и $P(j, j+1)\mathscr{T}'_n$ имеют общую действительную окрестность. Для этого возьмем $\zeta_k = (0, b, 0, 0,)$ при $k \neq j-1$, j или $j+1$ и $\zeta_{j-1} = (a, b, 0, 0)$, $\zeta_j = (0, 0, \varepsilon, 0)$, $\zeta_{j+1} = (-a, b, 0, 0)$, где $0 < |a| < b$. Все векторы $\lambda_{j-1}\zeta_{j-1} + \lambda_j\zeta_j + \lambda_{j+1}\zeta_{j+1}$ (где все $\lambda \geqslant 0$ и не все равны нулю) пространственноподобны. То же и для всех векторов $\lambda_{j-1}(\zeta_{j-1} + \zeta_j) - \lambda_j\zeta_j + \lambda_{j+1}(\zeta_{j+1} + \zeta_j)$ (рис. 2-4). Легко видеть, что присоединение остальных ζ_k даст точку Йоста, принадлежащую как $\mathscr{T}'_n$, так и $P(j, j+1)\mathscr{T}'_n$, причем то же верно и для всех вещественных точек из их достаточно малой окрестности.

2-5. ТЕОРЕМА ОБ ОСТРИЕ КЛИНА

В своей простейшей форме для одного комплексного переменного теорема об острие клина — древняя и прекрасно известная теорема. Мы докажем ее в форме, данной Пэнлеве в 1888 году.

Теорема 2-13

Пусть F_1 — функция, голоморфная в открытом множестве D_1, лежащем в верхней полуплоскости и имеющем в качестве части своей границы открытый интервал $a < x < b$. Пусть F_2 голоморфна в открытом множестве D_2, расположенном в нижней полуплоскости и имеющем в качестве части границы открытый интервал $a < x < b$. Предположим, что

$$F_1(x) = \lim_{y \to 0+} F_1(x + iy) \tag{2-94}$$

и

$$F_2(x) = \lim_{y \to 0+} F_2(x - iy) \tag{2-95}$$

существуют равномерно в $a < x < b$, непрерывны и удовлетворяют

$$F_1(x) = F_2(x) \quad \text{для} \quad a < x < b.$$

Тогда F_1 и F_2 в действительности голоморфны на $a < x < b$ и представляют собой одну и ту же голоморфную функцию.

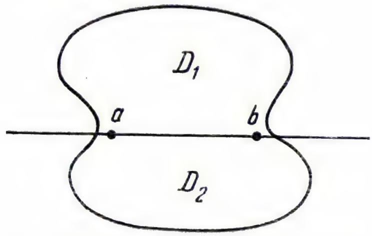

Рис. 2-5. Области D_1 и D_2 определения F_1 и F_2 соответственно.

Замечание

Предположение о равномерности в теореме на самом деле излишне. Можно показать, что если предельные функции F_1 и F_2 существуют и непрерывны, то сходимость равномерна. Но чтобы сделать обсуждение совсем элементарным, мы примем гипотезу о равномерности.

Доказательство

Пусть C_1 и C_2 — два контура, лежащих в D_1 и D_2 соответственно, за исключением интервала $a' \leqslant x \leqslant b'$, где $a < a' < b' < b$.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{F_1(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)} = \begin{cases} F_1(z) & z \text{ внутри } C_1, \\ 0 & z \text{ внутри } C_2 \end{cases}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{F_2(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)} = \begin{cases} F_2(z) & z \text{ внутри } C_2, \\ 0 & z \text{ внутри } C_1 \end{cases}$$

по интегральной формуле Коши. Дальше в силу равномерности предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a'}^{b'}\frac{F_j(\xi\pm i\varepsilon)}{\xi-z\pm i\varepsilon}\,d\xi=\int_{a'}^{b'}\frac{F_j(\xi)}{\xi-z}\,d\xi,$$

$j=1,\ 2$ соответственно.

Рассмотрим теперь функцию G, определенную так:

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{C_1}\frac{F_1(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)}+\int_{C_2}\frac{F_2(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)}\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{F(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)},$$

где C — контур, получаемый обходом по $C_1-(a'b')$, а затем по $C_2-(b'a')$. F определено как F_1 над действительной

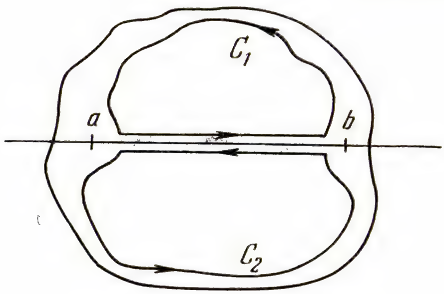

Рис. 2-6. Контуры C_1 и C_2.

осью и как F_2 под ней. G голоморфна везде внутри C_1 и C_2, а также на открытом интервале $a'<x<b'$. Она совпадает с F_1 внутри C_1 и с F_2 внутри C_2. Таким образом, она дает требуемое аналитическое продолжение функций F_1 и F_2. ∎

Следствием этой теоремы является общеизвестный принцип отражения Шварца, который гласит: если F_1 голоморфна в D_1, как в теореме, и равномерно сходится к граничным значениям на любом подинтервале из $a<x<b$, чем определяется непрерывная вещественная функция, то F_1 голоморфна в $\overline{D}_1$, причем в $\overline{D}_1$ ее продолжает $\overline{F_1(\overline{z})}$. Здесь $\overline{D}_1$ — область, комплексно сопряженная D_1. На са-

мом деле принцип отражения Шварца предвосхитил теорему 2-13 и вдохновил ее открытие.

Мы будем шаг за шагом обобщать эту теорему, чтобы получить, в конце концов, теорему об острие клина в том виде, в каком она понадобится в следующих главах.

Первый шаг — переход от одного комплексного переменного к нескольким. Уже для двух переменных видно, что при этом появляются существенно новые черты. Аналог области D_1 лежит в произведении верхних полуплоскостей: $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$; аналог D_2 лежит в произведении нижних полуплоскостей: $y_1 < 0$ и $y_2 < 0$. Утверждение теоремы — голоморфность в некоторой окрестности интервала на вещественной оси, где F_1 и F_2 совпадают. Эта окрестность с необходимостью содержит куски областей: $y_1 > 0$, $y_2 < 0$ и $y_1 < 0$, $y_2 > 0$. Это — множество новых точек голоморфности, имеющее размерность пространства, так что здесь утверждение в этом отношении сильнее, чем в теореме 2-13. (Это связано с явлением *аналитического расширения*; см. Бохнер и Мартин, гл. IV.) Размер области новых точек голоморфности зависит от размеров областей D_1 и D_2. Это — неизбежная черта новой ситуации, намного усложняющая формулировку теоремы.

Теорема 2-14

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество $\mathbf{C}^n$, содержащее вещественный участок E, являющийся открытым множеством в $\mathbf{R}^n$. Пусть D_1 — пересечение $\mathcal{O}$ с произведением верхних полуплоскостей

$$D_1 = \{z_1, \ldots, z_n;\, z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{O},\, y_1 > 0, \ldots, y_n > 0\} \tag{2-96}$$

и D_2 — пересечение $\mathcal{O}$ с произведением нижних полуплоскостей

$$D_2 = \{z_1, \ldots, z_n;\, z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{O},\, y_1 < 0, \ldots, y_n < 0\}. \tag{2-97}$$

Предположим, что F_1 голоморфна в D_1, F_2 — в D_2, и пределы, при $y_1 > 0, \ldots, y_n > 0$,

$$\lim_{y_1,\ldots,y_n\to 0} F_1(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n) = F_1(x_1,\ldots,x_n), \tag{2-98}$$

$$\lim_{y_1,\ldots,y_n\to 0} F_2(x_1-iy_1,\ldots,x_n-iy_n) = F_2(x_1,\ldots,x_n) \tag{2-99}$$

существуют, непрерывны по $x_1, \ldots, x_n$ и равны при $x_1, \ldots, x_n \in E$, причем пределы равномерны в E.

Тогда существуют (комплексная) окрестность N множества E, лежащая в $\mathbf{C}^n$, и голоморфная функция G такая, что G совпадает с F_1 на D_1 и с F_2 на D_2, причем G голоморфна на N. Окрестность N можно выбрать так, что она будет зависеть только от $\mathcal{O}$ и E.

Замечания

1. G, очевидно, осуществляет аналитическое продолжение F_1 и F_2.

2. Так как E — открытое множество, то оно является объединением кубов. Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда E — открытый куб. Далее, так как с помощью вещественной трансляции и вещественного изменения масштаба куб можно центрировать около начала и привести его к любым размерам, то можно предположить без потери общности, что E имеет удобные размеры, скажем $-1-\varepsilon < x_j < 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $j = 1, \ldots, n$.

3. При доказательстве мы будем пользоваться контуром интегрирования в плоскости z_j, представляющим собой окружность, проходящую через точки -1 и $+1$. Контур удовлетворителен, если он лежит в $\mathcal{O}$.

4. Настоящее доказательство, которое будет проведено, использует немного больше, чем указано в гипотезах теоремы: ограниченность производных $\partial F_1/\partial z_j$, $\partial F_2/\partial z_j$ в окрестности точек $z_1, \ldots, z_n = +1, \ldots, +1$ и $-1, \ldots, -1$. Для данных функций F_1, F_2 со свойствами из теоремы

всегда можно определить *первообразные*

$$\hat{F}_j(z_1, \ldots, z_n) = \int_{-1}^{z_1} d\zeta_1 \ldots \int_{-1}^{z_n} d\zeta_n F_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \quad j = 1, 2,$$

и в силу равномерной сходимости F

$$\lim_{y_1, \ldots, y_n \to 0} \hat{F}_1(z_1, \ldots, z_n) = \int_{-1}^{x_1} d\xi_1 \ldots \int_{-1}^{x_n} d\xi_n F_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) =$$
$$= \lim_{y_1, \ldots, y_n \to 0} \hat{F}_2(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n).$$

Первые производные $\hat{F}$ ограничены. Ясно, что первообразные непрерывны на $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ и голоморфны в тех же точках, что и F_1, F_2. Значит, в предположении об ограниченности $\partial F_1/\partial z_j$, $\partial F_2/\partial z_j$ потери общности нет.

Доказательство

Определим функцию G от $n+1$ переменных в области $|\zeta| < 1$, $|z_j| < R$, $j = 1, \ldots, n$ по формуле

$$G(\zeta, z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{F_1\left(\frac{u+z_1}{1+uz_1}, \ldots, \frac{u+z_n}{1+uz_n}\right) du}{u - \zeta} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{F_2\left(\frac{u+z_1}{1+uz_1}, \ldots, \frac{u+z_n}{1+uz_n}\right) du}{u - \zeta}, \quad (2\text{-}100)$$

где контуры C_+ и C_- в u-плоскости — единичные полуокружности, обходимые против часовой стрелки:

$$\begin{aligned} C_+ &: \quad |u| = 1, \quad \operatorname{Im} u \geqslant 0, \\ C_- &: \quad |u| = 1, \quad \operatorname{Im} u \leqslant 0. \end{aligned} \quad (2\text{-}101)$$

Если R достаточно мало, а куб выбран достаточно малым, то аргументы F_1 и F_2 будут целиком в D_1 и D_2, соответственно, при изменении u вдоль C_+ и C_-, соответственно, на

основании элементарного тождества

$$\operatorname{Im}\left(\frac{u+z}{1+uz}\right)=\frac{\eta(1-|z|^2)+y(1-|u|^2)}{|1+uz|^2},$$

где $u=\xi+i\eta$, $z=x+iy$ (см. рис. 2-7). Предыдущее утверждение справедливо за исключением значений $u=\pm 1$,

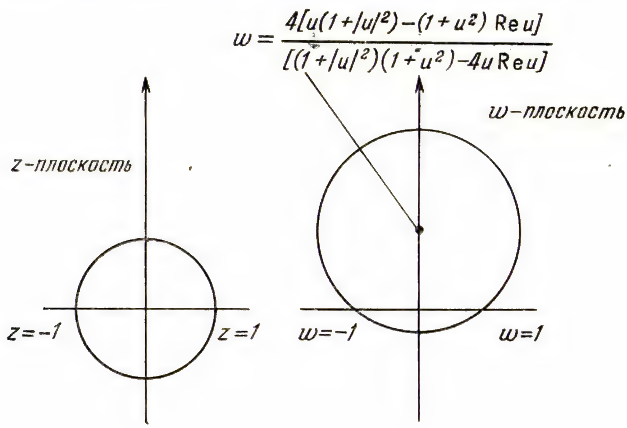

Рис. 2-7. Иллюстрация отображения $w=(u+z)/(1+uz)$. Когда z пробегает единичную окружность $|z|=1$, w пробегает указанную окружность. Точки $z=\pm 1$ всегда отображаются в $w=\pm 1$.

когда аргументы будут $\pm 1, \ldots, \pm 1$, т. е. оба — точками из E.

Из непрерывности F_1 и F_2 ясно, что (2-100) определяет G как непрерывную функцию по всем ее переменным вместе, аналитичную по ζ при фиксированных значениях $z_1, \ldots, z_n$. Кроме того, частные производные G по z_j существуют в силу нашего предположения об ограниченности частных производных F_1 и F_2 в окрестности E. Поэтому G — голоморфная функция от $\zeta, z_1, \ldots, z_n$ в $|\zeta|<1$, $|z_j|<R$, $j=1, \ldots, n$. В частности, ее значения $G(0, z_1, \ldots, z_n)$ как функция от $z_1, \ldots, z_n$ при $\zeta=0$ определяют голоморфную функцию от n переменных в $|z_j|<R$, $j=1, \ldots, n$.

Остается идентифицировать $G(0, z_1, \ldots, z_n)$ с $F_1(z_1, \ldots, z_n)$ в D_1 и с F_2 в D_2.

Рассмотрим $G(\zeta, x_1, \ldots, x_n)$ с $|x_j| < R$, $j = 1, \ldots, n$.

Тогда подынтегральные выражения в первом и втором членах будут соответственно:

$$F_j\left(\frac{u+x_1}{1+ux_1}, \ldots, \frac{u+x_n}{1+ux_n}\right), \quad j = 1, 2. \tag{2-102}$$

Они голоморфны как функции от u при $\operatorname{Im} u > 0$ и $\operatorname{Im} u < 0$ соответственно и имеют одинаковые граничные значения при $\operatorname{Im} u = 0$, по предположению *). Тем самым, по теореме 2-13, они аналитичны во всем единичном диске и продолжают друг друга. Значит, в этом случае (2-100) представляет собой формулу Коши:

$$G(\zeta, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} F_1\left(\dfrac{\zeta+x_1}{1+\zeta x_1}, \dfrac{\zeta+x_2}{1+\zeta x_2}, \ldots, \dfrac{\zeta+x_n}{1+\zeta x_n}\right), & \operatorname{Im}\zeta > 0, \\ F_2\left(\dfrac{\zeta+x_1}{1+\zeta x_1}, \dfrac{\zeta+x_2}{1+\zeta x_2}, \ldots, \dfrac{\zeta+x_n}{1+\zeta x_n}\right), & \operatorname{Im}\zeta < 0. \end{cases} \tag{2-103}$$

Но при фиксированном ζ левая часть является сужением на вещественную окрестность голоморфной функции $G(\zeta, \ldots)$, тогда как зависящая от знака мнимой части ζ правая часть является сужением

$$F_1\left(\frac{\zeta+z_1}{1+\zeta z_1}, \ldots, \frac{\zeta+z_n}{1+\zeta z_n}\right),$$

или

$$F_2\left(\frac{\zeta+z_1}{1+\zeta z_1}, \ldots, \frac{\zeta+z_n}{1+\zeta z_n}\right).$$

Так что $G(\zeta, \ldots)$ дает аналитическое продолжение каждой из них. В частности, при $\zeta = 0$ $G(0, z_1, \ldots, z_n)$ совпадает с $F_1(z_1, \ldots, z_n)$ в D_1 и с $F_2(z_1, \ldots, z_n)$ в D_2 и сама аналитична в $|z_j| < R$, $j = 1, \ldots, n$. По построению ясно, что R выбрано зависящим только от D_1, D_2 и E. ▮

---

*) В соответствии со сказанным выше F_j непрерывны по всем переменным вместе.

Вслед за этим мы хотим показать, как можно воспользоваться теоремой 2-14, чтобы получить теорему об острие клина для области, очевидно, гораздо более общей формы.

Теорема 2-15

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество $\mathbf{C}^n$, содержащее вещественную окрестность E, где E — некоторое открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Пусть $\mathscr{C}$ — открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что F_1 голоморфна в

$$D_1 = (\mathbf{R}^n + i\mathscr{C}) \cap \mathcal{O}, \qquad (2\text{-}104)$$

а F_2 — в

$$D_2 = (\mathbf{R}^n - i\mathscr{C}) \cap \mathcal{O}. \qquad (2\text{-}105)$$

(Запись $\mathbf{R}^n \pm i\mathscr{C}$ означает множество всех векторов вида $x \pm iy$ соответственно, где x и y — вещественные векторы с n компонентами и $y \in \mathscr{C}$.)

Предположим, что пределы при $x \in E$

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathscr{C}}} F_1(x + iy) = F_1(x) \qquad (2\text{-}106)$$

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathscr{C}}} F_2(x - iy) = F_2(x) \qquad (2\text{-}107)$$

существуют, непрерывны и совпадают на E, и при этом предел равномерен на E.

Тогда существуют (комплексная) окрестность N множества E и голоморфная функция G, совпадающая с F_1 в D_1 и с F_2 в D_2 и голоморфная в N. Здесь N не зависит от F_1, F_2, но зависит, конечно, от E, $\mathscr{C}$ и $\mathcal{O}$ ■

Доказательство

Так как $\mathscr{C}$ — открытый выпуклый конус, то в нем можно выбрать n линейно независимых векторов, скажем $y^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. Растягиваемый ими выпуклый конус $\mathscr{C}'$ является подконусом $\mathscr{C}$. Поскольку $y^{(k)}$ линейно независимы,

то любой n-вектор z можно записать в виде

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y^{(k)}.$$

Переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ связаны с $z_1, \ldots, z_n$ посредством невырожденного вещественного линейного преобразования. Когда z пробегает $\mathbf{R}^n + i\mathscr{C}'$, λ_k независимо изменяются в верхней полуплоскости. Поэтому гипотезы этой теоремы (если $\mathscr{C}$ заменить на $\mathscr{C}'$ и z заменить на λ) приводятся к гипотезам теоремы 2-14. Выводы последней, выраженные через z, приведены выше. ▌

В приложениях главы 4 мы будем иметь дело с множеством из n четыре-векторов $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, где $\zeta_j = \xi_j - i\eta_j$ и $\eta_j \in V_+$. Так что $\mathscr{C}$ в этом случае будет конусом в $4n$ измерениях, прямым произведением n верхних световых конусов.

Теперь мы вводим второе существенное усложнение в теорему об острие клина. Мы допускаем, что F_1 и F_2 не обязаны в качестве граничных значений иметь непрерывные функции и стремиться к ним поточечно, напротив, они вполне могут иметь граничные значения, являющиеся обобщенными функциями, и приближаться к ним в смысле теории обобщенных функций. Общеизвестный пример являет функция $(x+iy)^{-1}$ при $y \to 0$. Ее граничным значением при $y \to 0$, $y > 0$ будет $P(1/x) - \pi i\delta(x)$ в том смысле, что для каждой основной функции f имеем:

$$\lim_{y\to 0+} \int \frac{f(x)\,dx}{x+iy} = P \int \frac{f(x)\,dx}{x} - \pi i f(0),$$

где P означает главное значение Коши. Это как раз и есть определенная нами сходимость обобщенных функций в $\mathscr{D}'$. Итак, рафинированной версией теоремы об острие клина будет

Теорема 2-16

Предположим, что гипотезы теоремы 2-15 выполнены, но только вместо (2-106) и (2-107) будем иметь для каждой основной функции с

компактным носителем, лежащим в E,

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\mathscr{C}}} \int F_1(x+iy)\,dx\,f(x) = T(f)$$

и

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\in\mathscr{C}}} \int F_2(x-iy)\,dx\,f(x) = T(f),$$

где T — обобщенная функция из $\mathscr{D}(E)'$.

Заключения теоремы 2-15 снова справедливы.

Доказательство

Идея доказательства в следующем. Построим F_{1f} и F_{2f}, регуляризуя F_1 и F_2:

$$\begin{aligned} F_{1f}(x+iy) &= \int d\xi\, f(x-\xi) F_1(\xi+iy), \\ F_{2f}(x+iy) &= \int d\xi\, f(x-\xi) F_2(\xi+iy), \end{aligned} \tag{2-108}$$

где f — бесконечно дифференцируемая функция с достаточно малым носителем. F_{1f} и F_{2f} — снова голоморфные функции, но теперь они удовлетворяют требованиям теоремы 2-15. Надо показать тогда, что получающаяся G_f имеет вид $G_f(x+iy) = \int f(x-\xi)\,d\xi\, G(\xi+iy)$, где G — искомая голоморфная функция.

Действительно, уравнение (2-108) определяет две голоморфные функции, если носитель f достаточно мал, а $x+iy$ изменяется в некотором подмножестве, D_1 или D_2 соответственно, так как интегралы непрерывны по $x+iy$ и удовлетворяют условиям Коши — Римана по каждому переменному в отдельности:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int d\xi\, f(x-\xi) F(\xi+iy) = \int d\xi \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-\xi) F(\xi+iy) =$$
$$= \int d\xi\, f(x-\xi) \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\xi+iy) = -i\frac{\partial}{\partial y_i} \int d\xi\, f(x-\xi) F(\xi+iy). \tag{2-109}$$

Когда $y \to 0$, эти голоморфные функции сходятся к $T(\hat{f}_{-x})$ равномерно по x на достаточно малых компактных подмножествах E. Здесь

$$\hat{f}_{-x}(\xi) = f(x-\xi).$$

(Напомним, что сходимость последовательности обобщенных функций всегда равномерна на ограниченных множествах, если последовательность вообще сходится, а $\hat{f}_x$ образуют ограниченное множество при изменении x в компактном множестве.)

Итак, по теореме 2-15, существует голоморфная функция G_f, которая совпадает с F_{1f} в открытом подмножестве D_1 и с F_{2f} в открытом подмножестве D_2, голоморфна в окрестности открытого подмножества E и дает аналитическое продолжение F_1 и F_2. По самому построению G_f видно, что она оказывается интегралом Коши от обобщенной функции в f, так что $G_f(x+iy)$ при фиксированном $x+iy$ будет обобщенной функцией в f. Поэтому в силу теоремы Шварца о ядре существует обобщенная функция $H(\xi, x+iy)$ такая, что

$$G_f(x+iy) = \int d\xi\, f(-\xi) H(\xi, x+iy).$$

Но из рассмотрения интегральной формулы Коши сразу выводим, что при достаточно малых t

$$G_{f_t}(x+iy) = G_f(x+t+iy),$$

откуда следует благодаря единственности H, что

$$H(\xi+t, x+iy) = H(\xi, x+t+iy).$$

Иными словами, H зависит только от $x+\xi$, но не от $\xi - x$, т. е.

$$G_f(x+iy) = \int d\xi\, f(x-\xi) H(\xi, iy).$$

Пусть теперь f_k — последовательность основных функций, сходящаяся к δ-функции в начале, а g — основная функция по x и y. Тогда для любой основной функции g с достаточно

малым носителем

$$\int dx\,dy\, g(x,y) G_{f_k}(x+iy) =$$
$$= \int d\xi\, dy \left[\int dx\, f_k(x-\xi) g(x,y) \right] H(\xi, iy) \to$$
$$\to \int dx\,dy\, g(x,y) H(x,iy).$$

Но $G_{f_k}(x+iy)$ — последовательность голоморфных функций, и, как мы уже разъяснили в разделе 2-3, сходимость для всех g такой последовательности, размытой с помощью основных функций с носителем, лежащим в или на данном компактном множестве, влечет за собой равномерную сходимость последовательности к голоморфной функции $G(x+iy)$. Поэтому $H(x, iy) = G(x+iy)$ — голоморфная функция. Так как последовательность сходится на открытом множестве из D_1 к F_1 и на открытом множестве из D_2 к F_2, то она и дает требуемое аналитическое продолжение. ∎

В приложениях главы 4 у нас будет случай использовать следующую теорему, являющуюся простым следствием теоремы об острие клина.

Теорема 2-17

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество из $\mathbf{C}^n$, содержащее вещественную окрестность E, представляющую собой открытое множество из $\mathbf{R}^n$. Предположим, что F — функция, голоморфная в

$$\mathcal{B} = (\mathbf{R}^n + i\mathcal{C}) \cap \mathcal{O},$$

где $\mathcal{C}$ — открытый выпуклый конус из $\mathbf{R}^n$. Предположим дальше, что

$$\lim_{y\to 0} F(x+iy) = 0 \quad \text{при} \quad x \in E, \tag{2-110}$$

где сходимость понимается в смысле $\mathcal{D}(E)'$.

Тогда $F = 0$ во всем $\mathcal{B}$.

Доказательство

Определим $F_1(x+iy)=\overline{F(x-iy)}$. Функция F_1 голоморфна в области $\overline{\mathscr{B}}$, комплексно сопряженной $\mathscr{B}$, и стремится к 0 при $y\to 0$. Таким образом, можно применить теорему 2-16 об острие клина к F и F_1 и заключить, что существует функция G, голоморфная в комплексной окрестности множества E и являющаяся аналитическим продолжением F и F_1. Но согласно (2-110) G исчезает на E как обобщенная функция, а значит и как функция. Так как E — вещественная окрестность, то G исчезает везде в $\mathscr{B}$. ∎

2-6. ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА

На протяжении главы 1 мы предполагали, что читатель знаком с элементарной теорией пространства Гильберта. Здесь мы сделаем ряд разрозненных замечаний, которые, как мы надеемся, свяжут эту элементарную теорию с некоторыми из аргументов, использованных в других местах книги.

Напомним, что гильбертово пространство $\mathscr{H}$ есть векторное пространство со скалярами, являющимися комплексными числами *), и со скалярным произведением (,), представляющим собой комплекснозначную функцию от двух векторов в $\mathscr{H}$, удовлетворяющую

$$(\Phi, \Psi)=\overline{(\Psi, \Phi)}, \quad (\Phi, \alpha\Psi+\beta\chi)=\alpha(\Phi, \Psi)+\beta(\Phi, \chi),$$

причем

$$\|\Phi\|^2\equiv(\Phi, \Phi)\geqslant 0 \tag{2-111}$$

и

$$\text{из} \quad (\Phi, \Phi)=0 \quad \text{следует} \quad \Phi=0. \tag{2-112}$$

Сверх того, требуется, чтобы $\mathscr{H}$ было *полным* в том смысле, что любая последовательность Коши векторов должна иметь предел. Это значит: если Φ_n, $n=1, 2, \ldots,$ — последовательность векторов такая, что для каждого $\varepsilon>0$

---

*) Имеются, конечно, также и вещественные гильбертовы пространства, в которых используются вещественные скаляры, но мы их здесь не будем рассматривать.

найдется целое N такое, что

$$\|\Phi_n - \Phi_m\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n, m \geqslant N$$

(тогда Φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, называется *последовательностью Коши*), то существует вектор Φ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_n - \Phi\| = 0.$$

Первый пункт, который мы хотим обсудить, — это сепарабельность гильбертовых пространств, встречающихся в квантовой теории поля. Напомним, что множество S векторов *плотно* в $\mathscr{H}$, если для каждого вектора $\Phi \in \mathscr{H}$ и $\varepsilon > 0$ найдется вектор $\Psi \in S$ такой, что $\|\Phi - \Psi\| < \varepsilon$. Гильбертово пространство *сепарабельно*, если оно содержит счетное плотное множество или же, другими словами, если в нем имеется последовательность векторов, являющаяся плотной. Альтернативно эта особенность описывается в терминах полных ортонормированных множеств. Гильбертово пространство сепарабельно, если оно содержит счетное полное ортонормированное множество; оно не сепарабельно, если полные ортонормированные множества не счетны. От одного описания к другому можно перейти с помощью ортонормализации плотного множества, чтобы получить счетное полное ортонормированное множество, или же, образуя конечные линейные комбинации счетных полных ортонормированных множеств с комплексными числами, вещественные и мнимые части которых рациональны,— чтобы получить счетное плотное множество. В первоначальную аксиоматизацию фон Неймана требование сепарабельности входило как определяющее свойство гильбертова пространства. В наше время вошло в обиход употребление этого термина также в несепарабельном случае. Недавно физики начали рассматривать векторные пространства со скалярным произведением, на которое требование (2-111) и (2-112) не налагается (индефинитная метрика). Такие пространства мы не будем называть гильбертовыми и даже вообще не будем их рассматривать.

В нерелятивистской квантовой механике естественно рассматривать только сепарабельные гильбертовы пространства, поскольку обычно приходится иметь дело с конечным числом частиц и состояния реализовать как век-

торы в $L^2(\mathbf{R}^n)$, т. е. как классы эквивалентности интегрируемых с квадратом функций на n-мерном евклидовом пространстве, где две функции считаются эквивалентными, если они отличаются на множестве меры нуль. Известно, что это пространство Гильберта сепарабельно [20]. Иногда приводят довод, что в квантовой теории поля имеют дело с системой с бесконечным числом степеней свободы, ввиду чего надо пользоваться несепарабельным гильбертовым пространством. Грубо говоря, вот идея:

$$\left(\begin{array}{c}\text{система с конечным}\\ \text{числом степеней}\\ \text{свободы}\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{сепарабельное простран-}\\ \text{ство Гильберта}\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{система с бесконечным}\\ \text{числом степеней свободы}\\ \text{или что-нибудь в этом роде}\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{несепарабельное про-}\\ \text{странство Гильберта}\end{array}\right)$$

Наша следующая задача — объяснить, почему это неверно или, в лучшем случае, ведет к грубым заблуждениям.

В первую очередь заметим, что если $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3, \ldots$ — последовательность сепарабельных гильбертовых пространств, то тогда и их *прямая сумма* $\bigoplus\limits_j \mathscr{H}_j$ будет пространством Гильберта. Прямая сумма имеет элементами последовательности $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots\}$, где $\Phi_j \in \mathscr{H}_j$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi_j\|^2 < \infty.$$

Скалярным произведением в $\bigoplus\limits_j \mathscr{H}_j$ будет:

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n, \Psi_n),$$

где (Φ_n, Ψ_n) — скалярное произведение в $\mathscr{H}_n$, Φ означает $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots\}$, а Ψ — $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots\}$. Нетрудно видеть, что последовательности, имеющие лишь конечное число ненулевых элементов, причем ненулевые элементы принадлежат счетным плотным множествам соответствующих $\mathscr{H}_j$, образуют счетное плотное множество в $\bigoplus\limits_j \mathscr{H}_j$.

Прямую сумму можно использовать для построения векторов состояний, являющихся суперпозициями состояний с произвольно большим числом частиц. Просто берется $\bigoplus\limits_n \mathcal{H}_n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а $\mathcal{H}_n$ описывает состояния из n частиц. Именно это гильбертово пространство будет использовано в главе 3 для получения явных формул в теории свободного поля. Это — четко вырисованный контрпример к утверждению выше; свободное поле есть система с бесконечным числом степеней свободы. Разумеется, этот пример не описывает взаимодействующих частиц, но в той мере, в какой справедливы аргументы главы 1, присутствие взаимодействия не вносит различия. Состояния рассеяния асимптотически полной теории растягивают сепарабельное гильбертово пространство, поскольку и они имеют как раз вид $\bigoplus\limits_n \mathcal{H}_n$. [Здесь $\mathcal{H}_n$ — подпространство, растягиваемое входящими (или выходящими) состояниями рассеяния с n сталкивающимися частицами.] Все эти аргументы ясно указывают на отсутствие каких бы то ни было доводов в пользу того, что сепарабельные гильбертовы пространства не являются естественными пространствами состояний для квантовой теории поля.

Когда же действительно появляются в квантовой механике несепарабельные гильбертовы пространства? Имеются два заслуживающих упоминания случая. Первый возникает при образовании бесконечного тензорного произведения сепарабельных гильбертовых пространств. Мы не будем здесь приводить требующее некоей техники определение бесконечного тензорного произведения, заметим только, что это — естественное обобщение обычного тензорного произведения, применяемого для описания составных систем. Бесконечные тензорные произведения гильбертовых пространств (размерности большей 1!) всегда несепарабельны. Так как поле (Бозе) можно мыслить как систему, состоящую из бесконечного числа осцилляторов, то такое бесконечное тензорное произведение, казалось бы, и есть естественное пространство состояний. Для теории поля характерно, однако, что некоторые из ее наблюдаемых включают в себя сразу все осцилляторы, но, как оказывается, такие наблюдаемые могут естественно быть определены лишь на векторах, принадлежащих крохотному

сепарабельному подмножеству бесконечного тензорного произведения. Именно, подпространство, натянутое на такое подмножество, является естественным пространством состояний скорее, чем все само бесконечное тензорное произведение. Итак, хотя может оказаться удобным рассматривать пространство состояний как часть бесконечного тензорного произведения, это не необходимо.

Второй пример появления несепарабельного гильбертова пространства встречается в статистической механике при переходе к пределу, когда условный «ящик» становится произвольно большим, а плотность удерживается постоянной. Два состояния предельной системы, имеющих разные плотности, на самом деле отличаются друг от друга на бесконечное число частиц. Можно было бы ожидать, что они ортогональны. Это фактически имеет место во всех разработанных до сих пор примерах. Таким образом, имеется ортонормированная система, характеризуемая непрерывным параметром, плотностью, ввиду чего это гильбертово пространство несепарабельно. Нам кажется, что подобные явления — следствие рассмотрения систем, в которых каждое состояние содержит актуальную бесконечность физических частиц, так что здесь нет поводов для существования аналогичных явлений в релятивистской квантовой теории поля. Это завершает нашу дискуссию сепарабельности.

Теперь несколько замечаний о линейных операторах в гильбертовом пространстве. Дальше в этой книге будет много разговоров по поводу областей существования неограниченных операторов. Большинство физиков считает в глубине души, что ничто, существенно зависящее от таких вещей, не может иметь отношения к физике. Нам хотелось бы привести кое-какие аргументы в пользу обратного.

Напомним, что *оператор* A из гильбертова пространства $\mathscr{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathscr{H}_2$ есть функция, определенная на каком-то подмножестве из $\mathscr{H}_1$, называемом *областью существования* A, $D(A)$ и принимающая значения в $\mathscr{H}_2$, причем множество этих значений называется *областью определения* A, $R(A)$. *Граф* $\Gamma(A)$ оператора A есть множество всех пар $\{\Phi, A\Phi\}$, где $\Phi \in D(A)$. Это подмножество из $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. A *линеен*, если его граф — линейное

многообразие в $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Это сводится к утверждению, что если Φ_1 и $\Phi_2 \in D(A)$, то $\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 \in D(A)$ и

$$A(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2) = \alpha A\Phi_1 + \beta A\Phi_2,$$

что и есть обычное определение линейности. A *замкнут*, если его граф — замкнутое множество в $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, т. е. если Φ_n, $n = 1, 2, \ldots, \in D(A)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_n - \Phi\| = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|A\Phi_n - \Psi\| = 0$, то $\Phi \in D(A)$ и $A\Phi = \Psi$. Оператор B есть *расширение* A, если $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$. Это означает, что $D(A) \subset D(B)$ и $A\Phi = B\Phi$ для всех $\Phi \in D(A)$. Мы будем писать $A \subset B$ в этом случае.

Если S — какое-то множество в $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, то его *ортогональным дополнением* будет множество $S^\perp$ всех векторов, ортогональных к каждому вектору S. $S^\perp$ — всегда замкнутое линейное многообразие. Если S оказалось графом оператора из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$, то $S^\perp$ может оказаться графом оператора из $\mathscr{H}_2$ в $\mathscr{H}_1$. Так это или нет, зависит исключительно от того, следует ли из $\{\Phi, \Psi\}$ и $\{\chi, \Psi\} \in S^\perp$, что $\Phi = \chi$; если нет, то предполагаемый оператор не был бы однозначным, каким он должен быть согласно определению понятия оператора. Условием, что $\{\Phi, \Psi\}$ и $\{\chi, \Psi\} \in S^\perp$, будет:

$$(\{\Phi, \Psi\}, \{\Phi_1, A\Phi_1\}) = (\Phi, \Phi_1) + (\Psi, A\Phi_1) = 0$$

и

$$(\{\chi, \Psi\}, \{\Phi_1, A\Phi_1\}) = (\chi, \Phi_1) + (\Psi, A\Phi_1) = 0 \text{ для всех } \Phi_1 \in D(A).$$

Вычитая, видим, что $(\Phi - \chi, \Phi_1) = 0$; значит, если $D(A)$ плотно, то $\Phi = \chi$ и $S^\perp$ — граф преобразования. Отрицание этого преобразования называется *сопряженным* A^* от A. Иными словами, A^* — преобразование из $\mathscr{H}_2$ в $\mathscr{H}_1$, определенное как раз на тех $\Psi \in \mathscr{H}_2$, для которых существует $\chi \in \mathscr{H}_1$, удовлетворяющий

$$(\Psi, A\Phi) = (\chi, \Phi) \text{ для всех } \Phi \in D(A).$$

Тогда по определению $\chi = A^*\Psi$. Из определения также ясно, что A^* — замкнутое линейное преобразование, если только оно вообще существует.

Сопряжение играет важную роль при построении замкнутых линейных расширений данного оператора. Ясно, что любое замкнутое линейное расширение A должно быть расширением оператора, графом которого является $\overline{\Gamma(A)}$, замыкание $\Gamma(A)$ в $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Так как $\overline{\Gamma(A)} = \{[\Gamma(A)]^{\perp}\}^{\perp}$, то предыдущий критерий гласит, что $(A^*)^*$ — минимальное замкнутое линейное расширение A, если только области определения A и A^* плотны, так что существуют как A^*, так и $(A^*)^*$.

Оператор из $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_1$ *эрмитов*, если $A \subset A^*$ и *самосопряжен*, если $A = A^*$. (Иногда их называют соответственно симметричным и гипермаксимально-симметричным.) Оператор *вполне самосопряжен*, если $A^* = (A^*)^*$. Ясно, что A эрмитов тогда и только тогда, когда

$$(\Phi, A\Psi) = (A\Phi, \Psi) \text{ для всех } \Phi, \Psi \in D(A) \text{ и } D(A) \text{ плотно.}$$

Это то, что обычно понимается под эрмитовостью в элементарной квантовой механике, но то, что относится к делу, если A — наблюдаемая, есть самосопряженность. Только тогда собственные функции A будут полны. (За полным разъяснением отсылаем к [20].) Очевидно, что с этой точки зрения вполне самосопряженность так же хороша, как и самосопряженность, ведь $(A^*)^*$ однозначно определяется по A.

Оператор A *ограничен*, если $\|A\Phi\|/\|\Phi\|$ ограничен, когда Φ пробегает $D(A)$, т. е.

$$\|A\Phi\| \leqslant M\,\|\Phi\|, \qquad \Phi \in D(A)$$

при каком-то M, не зависящем от Φ. Ограниченный линейный оператор очевидно непрерывен, так как $\|A\Phi - A\Psi\| \leqslant M\|\Phi - \Psi\|$. Обратно, линейный оператор непрерывен в каждой точке своей области определения, если он непрерывен в 0, и если он непрерывен в 0, то он ограничен. Первое из этих утверждений — очевидное следствие линейности. Второе нуждается лишь в следующем простом аргументе. Предположим $\|A\Phi\| < \varepsilon$ для всех $\Phi \in D(A)$ таких, что $\|\Phi\| < \delta$. Тогда, если Ψ — любой элемент $D(A)$, то

$$\left\| \Psi\left(\frac{\delta}{2\|\Psi\|}\right) \right\| \in D(A)$$

и

$$\left\|\Psi\left(\frac{\delta}{2\|\Psi\|}\right)\right\| < \delta, \quad \text{так что} \quad \left\|A\left(\Psi\left(\frac{\delta}{2\|\Psi\|}\right)\right)\right\| < \varepsilon,$$

т. е. $\|A\Psi\| < (2\varepsilon/\delta)\|\Psi\|$, что доказывает, что A ограничен. Ограниченный линейный оператор A всегда имеет линейное расширение, область определения которого есть все $\mathcal{H}_1$. Наметим доказательство.

Сначала A по непрерывности расширяется до всех предельных точек $D(A)$, при этом в предельных точках A определяется как предел его значений в соседних точках $D(A)$. Это расширение как раз и есть $(A^*)^*$. Если замыкание $D(A)$ есть все $\mathcal{H}_1$, то построение окончено. Если же нет, то A можно определить произвольно (но линейно и ограниченно) на ортогональном дополнении $D(A)$ и дополнить определение до $\mathcal{H}_1$ по линейности. Если A — оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_1$, причем он эрмитов, линеен и ограничен, то, как ясно, всегда можно устроить так, чтобы его расширение на все $\mathcal{H}_1$ было самосопряженным. Значит, при рассмотрении ограниченных линейных операторов их можно без потери общности считать определенными везде.

Положение с неограниченными линейными операторами совершенно иное. Неограниченный линейный оператор разрывен в каждой точке своей области определения. Кроме того, если он замкнут, то его нельзя определить везде, потому что замкнутый всюду определенный линейный оператор необходимо ограничен. (Это последнее утверждение представляет собой *теорему о замкнутом графе*. По поводу доказательства см. [21].) По двум причинам нас особенно интересуют замкнутые операторы. С одной стороны, нам надо изучать самосопряженные расширения эрмитовых операторов A. Эрмитов A всегда имеет замкнутое линейное расширение $(A^*)^*$, и любое самосопряженное расширение A будет расширением и $(A^*)^*$. С другой стороны, нам надо будет изучать неэрмитовы операторы A с плотными областями определения, так что их сопряженные всегда замкнуты. Ясно, что самое лучшее, на что можно надеяться при таких обстоятельствах, это что операторы будут определены плотно, но не везде, и разрывны везде на своих областях определения.

Эти факты составляют часть того, что обычно считается патологией гильбертова пространства, и естественная реакция на них — сделать декларацию, что будут рассматриваться только ограниченные операторы: единственные операторы — это ограниченные операторы! Имеются даже хорошие физические основания для такой позиции, потому что, как подробно разъясняется в [20], неограниченный оператор, представляющий наблюдаемую, должен быть самосопряженным, а утверждения о ее наблюдениях могут быть перевыражены в терминах спектральных проекций, являющихся ограниченными операторами. Имеется несколько объяснений, почему, тем не менее, аксиомы главы 3 выражены в терминах неограниченных операторов. Во-первых, именно эти величины прямо соответствуют классическим полям, а это — источник вдохновения квантовой теории поля. Во-вторых, уравнения, описывающие локальное взаимодействие между полями в пространстве-времени, записываются через такие неограниченные операторы. Могут сказать, что эти аргументы и выражают как раз то, что в квантовой теории поля не в порядке, и это взгляд, который можно защищать. Но главный пункт предприятия, представленного главами 3 и 4,— исследование всеми средствами современной математики тех физических идей, которые развились в течение последних пятидесяти лет. Тому же, кто захочет внести более радикальные изменения в основы, мы скажем: Bravo! и Bon voyage!

Решившись однажды иметь дело с неограниченными операторами, мы встречаемся лицом к лицу с парой практических проблем, имеющих отношение к их областям определения. Может случиться, что A^2 не определен, кроме как на нулевом векторе, поскольку может случиться, что

$$\{AD(A)\} \cap D(A) = \{0\}.$$

Но плохо то, что нам придется иметь дело с множествами неограниченных операторов и нам понадобится вычислять полиномы от них. Требуются специальные предположения, чтобы быть уверенным, что такие операции имеют смысл хотя бы на плотных множествах векторов. Естественно, приходим к предположению об общей плотной области определения D для всех рассматриваемых неограниченных операторов, от которых берутся полиномы. Как только

имеем D, возникает другая задача: до какой степени однозначно определяются неограниченные операторы по их значениям на D, независимо от того, где они могут быть определены еще? Это звучит особенно остро в случае наблюдаемых, так как оператор, который, будучи сужен к векторам из D, является эрмитовым, мог иметь несколько различных самосопряженных расширений, и для уточнения теории следовало бы сказать, какое самосопряженное расширение имеется в виду. Более того, уравнения, справедливые на векторах из D, не обязаны быть справедливы на других векторах. Например, можно иметь два оператора, каждый из которых вполне самосопряжен, будучи сужен к векторам на плотной области D, и которые коммутируют на таких векторах, но самосопряженные расширения которых не коммутируют [23]. Может ли такое поведение встретиться в квантовой теории поля — в настоящий момент неизвестно, ввиду чего весьма любопытно, насколько полную теорию можно получить, не решая этого вопроса. Главный пункт предыдущих замечаний — привлечь внимание читателя к этим важным задачам. Остаток книги посвящен вопросу, как их обойти.

Последняя тема, которую мы хотим обсудить,— теория непрерывных унитарных представлений группы трансляций пространства-времени. Здесь особенно важно установить связь между утверждениями главы 1 относительно спектра энергии-импульса в физической теории и критериями, которыми мы будем пользоваться в главах 3 и 4. Говоря точнее, вот что мы имеем в виду. В главах 3 и 4 мы будем иметь матричные элементы вида

$$(\Phi, U(a, 1)\Psi), \tag{2-113}$$

где Φ и Ψ — некоторые специальные векторы, и мы будем утверждать, что

$$\int e^{-ip\cdot a}\, da (\Phi, U(a, 1)\Psi) = 0, \tag{2-114}$$

если p не принадлежит физическому спектру, лежащему в $\bar{V}_+$. Операция, указанная в (2-114), имеет математический смысл, так как будет показано, что (2-113) — бесконечно дифференцируемая ограниченная функция и, значит, ее фурье-образ существует как обобщенная функция

умеренного роста. Имеет смысл утверждение, что обобщенная функция умеренного роста исчезает в открытом множестве. С другой стороны, откуда мы знаем, что это математическое предложение имеет отношение к утверждению, что спектр энергии-импульса нашей теории лежит в $\overline{V}_+$? Формально это обычно показывают, записав разложение по промежуточным состояниям физического импульса Q и каких-либо других квантовых чисел α:

$$(\Phi, \Psi) = \sum_\alpha \int dQ \langle \Phi | Q\alpha \rangle \langle Q\alpha | \Psi \rangle.$$

Тогда

$$\int da\, e^{-ip\cdot a} (\Phi, U(a, 1)\Psi) =$$

$$= \sum_\alpha \int dQ \int da\, e^{-i(p-Q)\cdot a} \langle \Phi | Q\alpha \rangle \langle Q\alpha | \Psi \rangle =$$

$$= (2\pi)^4 \sum_\alpha \int dQ\, \delta(Q - p) \langle \Phi | Q\alpha \rangle \langle Q\alpha | \Psi \rangle,$$

так как

$$\langle Q\alpha | U(a, 1) | \Psi \rangle = e^{iQ\cdot a} \langle Q\alpha | \Psi \rangle.$$

Эти манипуляции — не строгие, потому что состояния $|Q\alpha\rangle$ могут иметь бесконечную норму. Этот метод можно полностью оправдать, пользуясь теорией прямых интегралов [22], но мы хотим этого избежать.

С другой стороны, рассмотрим несколько подробнее форму выражения $U(a, 1)$. Согласно теореме СНАГ [22] $U(a, 1)$ можно записать как интеграл Стильтьеса по импульсному пространству

$$U(a, 1) = \int e^{ip\cdot a}\, dE(p),$$

где E — мера на импульсном пространстве, значения которой — проекции. Это значит, что на каждой сфере в импульсном пространстве, а также на каждом множестве S, которое может быть получено из сфер с помощью счетного числа операций взятия объединений, пересечений и переходов к дополнениям, определен проекционный оператор $E(S)$. От $E(S)$ требуется, чтобы, во-первых,

$$E(S_1) E(S_2) = E(S_1 \cap S_2),$$

во-вторых,

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(S_j) = E(\bigcup_j S_j), \quad \text{если} \quad S_j \cap S_k \quad \text{пусто} \quad \text{при} \quad j \neq k$$

и, в-третьих,

$$E(\mathbf{R}^4) = 1.$$

В терминах E утверждение, что множество S не принадлежит физическому спектру энергии-импульса, означает просто, что $E(S) = 0$ или эквивалентно

$$\int da\, \rho(a)\, U(a, 1) = \int \tilde{\rho}(p)\, dE(p) = 0$$

для всех $\rho \in S$ таких, что $\operatorname{supp} \tilde{\rho}$ лежит в S. Здесь

$$\rho(a) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ip\cdot a}\, \tilde{\rho}(p)\, dp.$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\int da\, \rho(a)\, (\Phi, U(a, 1)\, \Psi) = 0,$$

а это — иначе выраженное равенство (2-114).

Эти несколько слов, очевидно, не могут заменить полное изложение теоремы СНАГ, но они передают основные идеи, позволяющие точно сформулировать физическую гипотезу о спектре энергии-импульса.

Выражения $E(S)$, которые могут появиться в теории, инвариантной относительно специальной группы Лоренца, а также относительно группы трансляций, не могут быть произвольными. В частности, имеется лишь одно p, при котором возможен дискретный точечный спектр: $p = 0$. Легко видеть, почему так должно быть. Если бы было $P^\mu \Psi_p = \mathrm{p}^\mu \Psi_p$ и $(\Psi_p, \Psi_p) = 1$ при каком-то $p \neq 0$, то $U(0, \Lambda)\Psi_p$ удовлетворяло бы $P^\mu U(0, \Lambda)\Psi_p = (\Lambda p)^\mu U(0, \Lambda)\Psi_p$, причем, когда Λ пробегает $L_+^\uparrow$, векторы $U(0, \Lambda)\Psi_p$ были бы непрерывным семейством нормированных состояний, ортогональных при $\Lambda_1 p \neq \Lambda_2 p$, что невозможно в сепарабельном гильбертовом пространстве. Интересно, что это позволяет проще охарактеризовать вакуумное состояние: это единственная нормируемая собственная функция P^0 или $\mathbf{P}$ или P^1.

Библиография

Стандартное руководство по теории обобщенных функций

1. L. Schwartz, Theorie des distributions, Hermann, Paris, Part I, 1957, Part II, 1959.

Другое систематическое изложение

2. И. М. Гельфанд и соавторы, Обобщенные функции, I, ..., V, Физматгиз, 1958.

Очень полезный обзор для физиков

3. L. Gårding and J. Lions, Functional Analysis, Nuovo Cimento Suppl. 14, 9 (1959).

Краткое изложение разделов 2-1 и 2-2 не может заменить эту статью, которая в свою очередь, как замечают сами ее авторы, не может заменить книгу Шварца. При доказательстве теорем 2-8, 2-9 и 2-10 мы следуем неопубликованным замечаниям Л. Гординга.

Наиболее элементарное доказательство теоремы о ядре принадлежит Гельфанду и Виленкину [2], т. IV. Другие доказательства можно найти в

4. L. Ehrenpreis, On the Theory of the Kernels of Schwartz, Proc. Amer. Math. Soc. 7, 713 (1956).
5. H. Gask, A Proof of Schwartz's Kernel Theorem. Math. Scand. 8, 327 (1960).

О преобразовании Лапласа смотри

6. L. Schwartz, Transformation de Laplace des distributions, Medd. Lunds Mat. Sem. Supplementband, p. 196 (1952).

Голоморфные функции нескольких комплексных переменных рассматриваются в

7. S. Bochner and W. T. Martin, Several Complex Variables, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948. (Есть русский перевод: С. Бохнер и У. Т. Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, 1951.)

Обзор для физиков с дальнейшими ссылками

8. A. S. Wightman, Analytic Functions of Several Complex Variables, pp. 159—221 в книге: «Dispersion Relations and Elementary Particles», Wiley, N. P., 1960.

Теорема 2-11 впервые была доказана для инвариантных голоморфных функций в диссертации Д. Холла; см.

9. D. Hall and A. S. Wightman, A Theorem on Invariant Analytic Functions with Applications to Relativistic Quantum Field Theory, Dan. Mat. Fys. Medd. 31, No. 5 (1957).

Обобщение на множества полей с произвольным законом преобразования дается в

10. R. Jost, Properties of Wightman Functions в «Lectures on Field Theory and the Many-Body Problem», E. R. Caianiello (ed.), Academic Press, New York, 1961 и
11. A. S. Wightman, Quantum Field Theory and Analytic Functions of Several Complex Variables, J. Indian Math. Soc. 24, 625 (1960).

Доказательство решающей леммы, данное в тексте, принадлежит В. Баргманну (не опубликовано).

Теорема 2-12 принадлежит Р. Йосту:

12. R. Jost, Eine Bemerkung zum CTP Theorem, Helv. Phys. Acta 30, 409 (1957).

Доказательство Пэнлеве теоремы 2-13 появилось в

13. P. Painlevé, Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, Ann. Fac. Toulouse 2, B27 (1888).

Теорема об острие клина под таким названием впервые появилась в

14. H. J. Bremmermann, R. Oehme and J. G. Taylor, A Proof of Dispersion Relations in Quantized Field Theories, Phys. Rev. 109, 2178 (1958).

Данное ими доказательство справедливо лишь при очень сильных ограничениях на поведение функций и их производных вблизи границы и не верно, когда граничными значениями являются обобщенные функции. Раньше, при доказательстве дисперсионных соотношений, Боголюбов, Медведев и Поливанов развили аргументацию, вполне адекватную случаю обобщенных функций в качестве граничных значений, но так как эти соображения появились в целом в специфическом контексте, то они не попытались выделить теорему об острие клина.

15. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.

16. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев и М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, 1958.

Точнее, теорема в данной здесь формулировке является локальной теоремой о голоморфных функциях, тогда как аналитические функции в контексте дисперсионных соотношений представляют собой типичные преобразования Лапласа функций с ограниченным носителем. См., однако, В. С. Владимиров, О теореме «острие клина» Боголюбова, Изв. АН СССР, сер. матем. 26, 825—833 (1962).

Дайсон наметил доказательство «без претензий на строгость», очень простое и естественное. Эти идеи и составили суть предложенного здесь доказательства.

17. F. J. Dyson, Connection between Local Commutativity and Regularity of Wightman Functions, Phys. Rev. 110, 579 (1958). Это доказательство было сделано точным в часто цитируемой статье Гординга и Бёрлинга, которая так и не появилась в печати; теорема 2-16 следует их методу.

Теорема об острие клина была обобщена Эпштейном на случай, когда конусы, в которых изменяются мнимые части, не противолежат.

18. H. Epstein, Generalization of the «Edge of the Wedge» Theorem, J. Math. Phys. 1, 524 (1960).

Доказательство теоремы об острие клина, которое может иметь преимущества для математика, так как пред-

ставляет собой обширное упражнение по функциональному анализу, дал

19. F. Browder, On the «Edge of the Wedge» Theorem, Can. Math. J. **15**, 125 (1963).

В элементарном доказательстве теорем 2-14 и 2-15, приведенном здесь, воплощены неопубликованные соображения Г. Борхерса и В. Глазера.

Классическое введение в математические основания квантовой механики —

20. J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1955. (Есть русский перевод: И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, «Наука», М., 1964.) Сепарабельность гильбертова пространства $L^2(\mathbf{R}^4)$ устанавливается на стр. 54—60 (русский перевод).

Экономное изложение теоремы о замкнутом графе дается на стр. 17—18 книги

21. L. H. Loomis, Abstract Harmonic Analysis, Van Nostrand, Princeton, N. Y., 1953. (Есть русский перевод: Л. Г. Люмис, Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, 1956.)

Буквы «С», «Н», «А», «Г» в теореме СНАГ означают фамилии Стоун, Наймарк, Амброз и Годеман. Ее изложение можно почерпнуть, комбинируя главу 10 из [25] с главой II из

22. J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann), Gauthier Villars, Paris, 1956.

Пример двух некоммутирующих самосопряженных операторов, которые коммутируют на общей плотной области их вполне самосопряженности, дается в

23. E. Nelson, Analytic Vectors, Ann. Math. **70**, 572 (1959), в особенности стр. 603—604. Сепарабельность G доказывается на стр. 373 книги

24. G. Köthe, Topologische lineare Räume, I, Springer, Berlin, 1960.

Другим полезным источником по коммутативности неограниченных операторов является

25. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Functional Analysis, Ungar, New York, 1955, в особенности раздел 116. (Есть русский перевод: Ф. Рисс и Секельфальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.)

От переводчика:

Систематическое изложение теории функций многих комплексных переменных, имеющее в виду приложения к теории поля, в частности, доказательство теоремы об «острие клина» Боголюбова,—

26. В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», 1964. (Готовится английское издание.)

Глава 3

ПОЛЯ И ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ

You boil it in sawdust: You salt it in glue
You condense it with locusts and tape
Still keeping one principal object in view —
To preserve its symmetrical shape*).

Fit the Fifth, *The Hunting of the Snark* **).

Lewis Carroll.

Классическое понятие поля возникло из стремления отказаться от представления о действии на расстоянии при описании электромагнитных и гравитационных явлений. В этих важных случаях поле обладает двумя основными свойствами: (1) оно наблюдаемо и (2) оно определяется набором функций в пространстве-времени с определенными трансформационными свойствами относительно соответствующей группы преобразований координат. Поскольку в квантовой механике наблюдаемые представляются эрмитовыми операторами, действующими в гильбертовом пространстве векторов состояний, то следует ожидать, что в релятивистской квантовой механике аналогом классического наблюдаемого поля должен быть набор эрмитовых операторов, определенных в каждой точке пространства-времени и обладающих заданными трансформационными свойствами относительно соответствующей группы. В первой части этой главы формулируется такое математическое определение поля в квантовой механике, которое находилось бы в согласии с этими общими идеями. Оказывается, что представляют интерес не только наблю-

---

*) «Замеси на опилках, чтоб клеем покрыть
И акриды добавь по норме.
Но запомни одно: придержи свою прыть —
Сохрани симметричную форму».

Песнь пятая *«Охота на Снарка»*.
Льюис Кэрролл.
(Перевод А. Д. Суханова.)

**) Снарк (Snark) — несуществующее животное, плод фантазии Льюиса Кэрролла. Его название предположительно происходит от слияния английских слов Snake (змея) и Shark (акула). (*Прим. перев.*)

даемые, но и ненаблюдаемые поля, так что мы будем также рассматривать наборы неэрмитовых операторов. Во второй части этой главы показано, как теория поля может быть сформулирована с помощью некоторых связанных с полями обобщенных функций — вакуумных средних от произведений операторов поля. Главным орудием, с помощью которого будут получены результаты главы 4, явится техника, позволяющая выражать свойства теории через свойства таких вакуумных средних.

3-1. АКСИОМЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПОНЯТИЕ ПОЛЯ И ТЕОРИЮ ПОЛЯ

В ходе анализа измерений поля, проделанного для электромагнитного поля в квантовой электродинамике, давно уже установлено, что компоненты полей как функции точки пространства-времени, вообще говоря, более сингулярны, чем обычные функции. Это приводит к тому, что только «размазанным» (smeared) полям можно сопоставить хорошо определенные операторы. Например, в случае электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ не есть хорошо определенный оператор, но $\int d\mathbf{x}dt\, f(x)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(f)$ — хорошо определенный. Здесь f — любая бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, определенная в пространстве-времени. Существует еще один момент, который следует отметить. Размазанное поле, такое как $\mathbf{E}(f)$, в соответствующим образом подобранном состоянии может достигать произвольно больших средних значений. Поэтому следует ожидать, что нам придется рассматривать неограниченные операторы. Известно, что неограниченный оператор вообще не может быть определен на каждом векторе сколько-нибудь естественным образом. Поэтому мы будем вынуждены сделать некоторые предположения об области в пространстве векторов состояния, на которой эти размазанные поля могут быть определены. Типичные состояния, на которых поля определить нельзя, — это состояния, в которых средние значения полей обращаются в бесконечность. Это — знакомая по элементарной квантовой механике ситуация, где оператор положения также нельзя определить на тех состояниях $\Psi(\mathbf{x})$, которые сами по себе

нормируемы, т. е. $\int |\Psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty$, но для которых интеграл $\int |\mathbf{x}|^2 |\Psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ не сходится.

Предположения, которые мы делаем, распадаются на четыре группы.

0. *Предположения релятивистской квантовой теории*

Состояния теории описываются единичными лучами в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Релятивистский закон преобразования состояний задается непрерывным унитарным представлением неоднородной группы $SL(2, C)$

$$\{a, A\} \to U(a, A).$$

Поскольку представление $U(a, 1)$ унитарно, оно может быть записано в виде $U(a, 1) = \exp\{iP^{\mu}a_{\mu}\}$, где P^{μ} — неограниченный эрмитов оператор, интерпретируемый как оператор энергии-импульса в этой теории. Оператор $P^{\mu}P_{\mu} = m^2$ интерпретируется как квадрат массы. Собственные значения оператора P^{μ} находятся либо внутри, либо на поверхности будущего конуса (*спектральное условие*).

Существует инвариантное состояние Ψ_0

$$U(a, A)\Psi_0 = \Psi_0, \tag{3-1}$$

которое единственно с точностью до постоянного фазового множителя (*единственность вакуума*).

В силу обсуждения, проведенного в разделе 1-2, мы могли бы, оставаясь на твердой физической основе, предположить гораздо больше о многообразии состояний в теории, но для дальнейшего в этом нет необходимости.

Далее сформулируем свойства, определяющие поле, закон преобразования которого относительно $SL(2, C)$ задан $n \times n$-матричным представлением $S: A \to S(A)$.

I. *Предположения об области определения и непрерывности поля*

Для каждой основной функции $f \in \mathcal{S}$, определенной во всем пространстве-времени, сущест-

вует набор операторов $\varphi_1(f), \ldots, \varphi_n(f)$. Эти операторы и сопряженные им операторы $\overset{*}{\varphi}_1(f), \ldots, \overset{*}{\varphi}_n(f)$ определены в области D гильбертова пространства, плотной *) в $\mathcal{H}$. Кроме того, область D представляет собой линейное множество векторов, содержащее вакуум Ψ_0, т. е.

$$\Psi_0 \in D. \tag{3-2}$$

Наконец, операторы $U(a, A)$, $\varphi_j(f)$ и $\overset{*}{\varphi}_j(f)$ переводят векторы из D в векторы также из D, т. е.

$$U(a, A)D \subset D,\ \varphi_j(f)D \subset D,\ \varphi_j^*(f)D \subset D, \tag{3-3}$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если $\Phi, \Psi \in D$, то $(\Phi, \varphi_j(f)\Psi)$ есть обобщенная функция умеренного роста, рассматриваемая как функционал от f.

Относительно области D следует сделать два замечания. Во-первых, D всегда включает в себя область D_0, состоящую из тех векторов состояния, которые получаются из вакуума в результате действия полиномов по «размазанным» полям. Это немедленно следует из (3-2) и (3-3). Во-вторых, если неограниченный оператор определен и эрмитов в некоторой области, то он может иметь несколько самосопряженных расширений на векторы вне этой области, даже если рассматриваемая область плотна. Это — хорошо известный в математике феномен, впервые изученный фон Нейманом (см. раздел 2-6 и [20] в библиографии к главе 2). Только самосопряженному оператору можно приписать обычное спектральное разложение, свойство полноты разложения по собственным функциям и т. д., т. е. те существенные качества, которыми должен обладать оператор, описывающий наблюдаемые в квантовой механике. Следовательно, чтобы наблюдаемое поле было полностью определено с физической точки зрения, область D должна быть достаточно широкой — настолько, чтобы эти поля, будучи определены на D, обладали единственными самосопряженными расширениями. Привлекательно было бы предположить, что в этом смысле доста-

*) См. определение в разделе 2-6.

точно большой оказывается уже область D_0, но это пока не доказано. Поэтому, чтобы сделать определение понятия поля достаточно гибким и пригодным в разных ситуациях, мы не будем фиксировать область D более, чем это требуется предположениями, перечисленными в I. В утешение заметим, что состояния рассеяния и матрица рассеяния в теории определяются однозначно полями, заданными в области D_0 (см. [5] и [15]). Кроме того, можно доказать, что инфинитезимальные операторы группы Пуанкаре P^μ и $M^{\mu\nu}$ имеют единственные самосопряженные расширения, когда они определены только на D_0. В начале раздела 3-2 будет показано, что существует область D_1 большая, чем D_0, на которую поля всегда могут быть расширены. Во всех практических случаях, с которыми мы столкнемся в главе 4, область D можно отождествить либо с D_1, либо с D_0.

II. *Закон преобразования поля*

Соотношение

$$U(a, A)\varphi_j(f)U^{-1}(a, A) = \sum S_{jk}(A^{-1})\varphi_k(\{a, A\}f) \tag{3-4}$$

выполняется, если обе его части действуют на любой вектор из области D. Здесь

$$\{a,\ A\}f(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{3-5}$$

До сих пор φ_j рассматриваются как компоненты какого-либо представления группы $SL(2, C)$ или группы $SL(2, C)$ с отражениями, в зависимости от релятивистской группы. Поскольку, как уже было отмечено в главе 1, все конечномерные представления суть суммы неприводимых представлений, естественно рассматривать компоненты какого-либо неприводимого представления как образующие одно поле. Тогда другие неприводимые представления могут рассматриваться как различные поля, встречающиеся в той же теории. Однако иногда полезно сгруппировать вместе компоненты, преобразующиеся согласно приводимому представлению, и рассматривать их в качестве компонент одного поля. Это вопрос чистого удобства. Наши обозначения в дальнейшем будут гибкими.

Когда появится необходимость отмечать различные наборы компонент, мы обычно будем пользоваться для них разными греческими буквами.

Примеры

(a) Поле спина нуль

Оно имеет одну компоненту, и если переписать (3-4) для обычных неразмазанных операторов, то получится:

$$U(a, A)\varphi(x)U^{-1}(a, A) = \varphi(\Lambda x + a).$$

(b) Векторное поле

Оно имеет четыре компоненты, которые будут обозначаться j_μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$:

$$U(a, A)j_\mu(x)U^{-1}(a, A) = \Lambda_\mu^{\nu}(A^{-1})j_\nu(\Lambda x + a).$$

(c) Дираково поле ψ

В данном случае у поля также четыре компоненты $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, но $S(A)$ уже представляет собой набор матриц 4×4, определенных посредством (1-44):

$$U(a, A)\psi_\alpha(x)U^{-1}(a, A) = \sum_{\beta=1}^{4} S(A^{-1})_{\alpha\beta}\,\psi_\beta(\Lambda x + a).$$

Следующее предположение основано на представлении о том, что измерения полей должны коммутировать, если они выполнены в точках, разделенных пространственноподобными интервалами.

III. *Локальная коммутативность, иногда называемая микроскопической причинностью*

Если носители f и g разделены пространственноподобным интервалом (т. е. если $f(x)g(y) = 0$ для всех пар точек, для которых $(x - y)^2 \geqslant 0$), то одно из равенств

$$[\varphi_j(f), \varphi_k(g)]_\pm \equiv \varphi_j(f)\varphi_k(g) \pm \varphi_k(g)\varphi_j(f) = 0 \tag{3-6}$$

выполняется для всех j, k, если левой частью

равенства подействовать на произвольный вектор из области D. Аналогично

$$[\varphi_j(f), \varphi_k^*(g)]_\pm = 0.$$

Если перейти к неразмазанным полям, то это предположение сводится к

$$[\varphi_j(x),\ \varphi_k(y)]_\pm = 0,$$

если $(x-y)^2 < 0$, и к

$$[\varphi_j(x), \varphi_k^*(y)]_\pm = 0,$$

где $\varphi^*(y)$ — это поле, интегрирование которого с основной функцией $g(y)$ дает оператор $[\varphi(\bar{g})]^*$, т. е. $\varphi^*(g) = [\varphi(\bar{g})]^*$.

Следует ожидать, что для наблюдаемых полей в (3-6) будет иметь место знак минус. Когда же равенство (3-6) выполняется при знаке плюс, то говорят, что операторы φ_j, φ_k *антикоммутируют*. В этом случае коммутировать будут билинейные комбинации полей. Какой именно знак следует выбрать, нам подсказывает знаменитая теорема о связи спина со статистикой, доказательство которой приведено в главе 4. (Противоположный выбор знака приводит к противоречию!) Тот факт, что антиперестановочные соотношения также представляют интерес, не подсказывается никакой классической аналогией. Это было одним из открытий основоположников квантовой теории.

Изложенные выше предположения определяют, какой смысл мы вкладываем в понятие *поля* в релятивистской квантовой теории. Однако они все же не характеризуют *теорию поля*. Например, в *любой* релятивистской квантовой теории скалярное поле вида $\varphi(x) = c\cdot\mathbf{1}$, где c — постоянная, удовлетворяет сделанным выше предположениям. Поэтому любая релятивистская квантовая теория содержит по крайней мере одно однопараметрическое семейство полей, хотя и тривиальных. Чтобы стать теорией поля, релятивистская квантовая теория должна содержать достаточное число полей с тем, чтобы состояния в этой

теории можно было бы единственным образом охарактеризовать в терминах полей и функций от них.

В старой формулировке теории поля выполнение этого требования чаще всего обеспечивалось за счет предположения, что поля образуют неприводимый набор операторов, удовлетворяющих каноническим перестановочным соотношениям в заданный момент времени:

$$[\varphi_j(\mathbf{x}, t), \pi_k(\mathbf{y}, t)] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta_{jk}. \tag{3-7}$$

(Здесь индекс j пробегает соответствующую последовательность чисел, а операторы π_j — это некоторые комбинации полей и их производных по пространственным и временным переменным.) Однако для записи (3-7) требуется, чтобы поля имели операторный смысл, будучи размазаны только по $\mathbf{x}$, а это — дополнительное сильное предположение, выходящее за рамки наших аксиом. Кроме того, как можно заключить из некоторых примеров, оператор $[\varphi(\mathbf{x}, t)\ \partial\varphi(\mathbf{y}, t')\ /\ \partial t']$ даже после сглаживания по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в общем случае сингулярен в точке $t-t'=0$. В таком случае трудно придать соотношению (3-7) какой-либо смысл. Потому очень нежелательно принять канонические перестановочные соотношения в качестве необходимого требования в теории поля.

В качестве замены предположения о канонических перестановочных соотношениях можно принять одно из его главных следствий: *размазанные поля образуют неприводимый набор операторов в гильбертовом пространстве.* Это означает в точности следующее*): если B — любой ограниченный оператор, удовлетворяющий условию

$$(\Phi, B\varphi_j(f)\Psi) = (\varphi_j(f)^*\Phi, B\Psi) \tag{3-8}$$

для всех $\Phi, \Psi \in D$, всех j и всех $f \in \mathcal{S}$, то B — постоянная, кратная единичному оператору. Заметим, что равенство (3-8) — это такая формулировка условия того, что операторы B и $\varphi_j(f)$ коммутируют друг с другом, которая избегает предположения, что $\varphi_j(f)$ может быть определен на векторах $B\Psi$, где $\Psi \in D$. Неприводимость полей, грубо говоря, означает, что каждый оператор есть функция операторов поля.

---

*) Соответствующая идея была высказана в [5].

Существует еще другое понятие коммутативности, которое широко употребляется. (См. работу Рисса — Надя [25] из библиографии к главе 2, стр. 133.) Оно состоит в следующем. Говорят, что ограниченный оператор B коммутирует с (не обязательно ограниченным) оператором T, если: 1) под действием оператора B область $D(T)$ определения оператора T переходит в себя, т. е. $BD(T) \subset D(T)$, и 2) для векторов $\Phi \in D(T)$ имеет место $BT\Phi = TB\Phi$. Ограниченный оператор, который коммутирует с $\varphi_j(f)$ в этом смысле, непременно коммутирует с $\varphi_j(f)$ в смысле (3-8).

Любопытно, что, по-видимому, есть более слабое предположение, чем неприводимость, которое в силу аксиом 0, I, II и III обеспечивает неприводимость, и мы примем его в качестве нашего определения.

Определение

> Релятивистская квантовая теория, удовлетворяющая аксиоме 0, с полем φ_j, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющим I, II и III, есть *теория поля*, если вакуумное состояние является *циклическим* для размазанных полей, т. е. если полиномы по компонентам сглаженных полей $\mathcal{P}(\varphi_1(f), \varphi_2(g), \ldots)$, действуя на вакуумное состояние, порождают набор векторов D_0, плотный в гильбертовом пространстве состояний.

Доказательство того, что из цикличности вакуума следует неприводимость поля, будет приведено в разделе 4-2.

Только что мы утверждали, что требование цикличности вакуума оказывается, по-видимому, более слабым предположением, чем неприводимость поля. Для набора ограниченных операторов осторожное слово «по-видимому» можно опустить; любой ненулевой вектор есть циклический вектор неприводимого набора ограниченных операторов. (*Доказательство.* Предположим, что вектор $\Psi \neq 0$ *не* циклический. Подпространство $\mathcal{H}_1$, натянутое на векторы $\mathcal{P}\Psi$, где $\mathcal{P}$ — всевозможные полиномы по ограниченным операторам, очевидно, инвариантно относительно любого из этих операторов и, по предположению, не составляет

всего гильбертова пространства. Проекция на подпространство $\mathcal{H}_1$ представляет собой нетривиальный оператор, коммутирующий со всеми рассматриваемыми ограниченными операторами, что противоречит требованию неприводимости. Следовательно, Ψ—циклический вектор.) В интересующем нас случае, когда связь между областями D и D_0 в явном виде неизвестна, вовсе не очевидно, что из неприводимости полей, определенных в области D, следует цикличность вектора Ψ_0. Если же $D = D_0$, то нетрудно показать, что это будет именно так.

До этого момента сделанные нами предположения о теории поля не имели никакого отношения к теории рассеяния. В соответствии с обсуждением, имевшим место в разделе 1-4, хотелось бы предположить, что справедлива

IV. *Асимптотическая полнота*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\text{in}} = \mathcal{H}^{\text{out}}.$$

Однако чтобы сделать это предположение, необходимо иметь какой-то способ вычислять состояния рассеяния всех элементарных систем теории поля, если даны поля. Существует несколько подходов к этой проблеме, причем тот из них, который теснее других связан с аксиомами 0, I, II и III, принадлежит Хаагу и Рюэлю. Рюэль показал, что из аксиом 0, I, II и III следует существование состояний рассеяния, т. е. ин- и аут-состояний одной, двух или более частиц, если только все одночастичные состояния могут быть порождены полиномом по размазанным полям. Тогда можно сформулировать аксиому IV в терминах таких состояний рассеяния.

Следует отметить, что между числом полей, необходимых для формулировки теории поля, и числом элементарных систем, которые эта теория описывает, какая-либо связь необязательна. Можно иметь одно поле и много элементарных систем или много полей и только одну элементарную систему. В этой книге мы не будем касаться теории Хаага — Рюэля (систематическое изложение ее читатели могут найти в оригинальных работах и книге Йоста). Ниже мы будем использовать только аксиомы 0, I, II и III и предположение о том, что мы рассматриваем теорию поля.

3-2. НЕЗАВИСИМОСТЬ И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ АКСИОМ

Существует один класс теорий поля, про которые известно, что они удовлетворяют аксиомам 0, I, II, III и IV: это теории свободных полей с различными массами и спинами, описанные эвристически в конце раздела 1-4. Теперь эти теории будут описаны более точно. Сам факт их существования говорит о непротиворечивости аксиом, правда в физически тривиальном случае, когда частицы, описываемые этими теориями, не взаимодействуют.

Во всех теориях свободных полей полное число частиц есть интеграл движения, и гильбертово пространство состояний записывается в виде прямой суммы

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}^{(n)}, \tag{3-9}$$

где $\mathscr{H}^{(n)}$ — это подпространство тех состояний, которые содержат точно n частиц. Это означает, что каждый вектор Φ из $\mathscr{H}$ задается последовательностью

$$\{\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots\} \tag{3-10}$$

векторов $\Phi^{(j)} \in \mathscr{H}^{(j)}$, а скалярное произведение в $\mathscr{H}$ есть

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)}), \tag{3-11}$$

где скалярное произведение $(\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)})$ определено в подпространстве $\mathscr{H}^{(n)}$. В $\mathscr{H}$ входят только те последовательности векторов, которые удовлетворяют

$$(\Phi, \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi^{(n)}\|^2 < \infty. \tag{3-12}$$

Для всех спинов $\mathscr{H}^{(0)}$ есть одномерное гильбертово пространство комплексных чисел. Для спина s гильбертово пространство $\mathscr{H}^{(n)}$ является пространством всех квадратично интегрируемых функций от аргументов $p_1\alpha_1, \dots$ $\dots, p_n\alpha_n$, симметричных, если s — целое, и антисимметричных, если s — полуцелое. Здесь α_j обозначает группу спинорных индексов без точек, подобных индексам в

(1-58). Скалярное произведение в $\mathscr{H}^{(n)}$ имеет вид

$$(\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)}) = \int \ldots \int d\Omega_m(p_1) \ldots d\Omega_m(p_n) \times$$
$$\times \sum_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 \ldots \beta_n}} \overline{\Phi^{(n)}}(p_1\alpha_1, \ldots, p_n\alpha_n) \prod_{j=1}^{n} \mathscr{D}^{(s,\,0)}\left(\frac{\tilde{p}_j}{m}\right)_{\alpha_j\beta_j} \times$$
$$\times \Psi^{(n)}(p_1\beta_1, \ldots, p_n\beta_n), \qquad (3\text{-}13)$$

а оператор поля φ_α определяется соотношением

$$\varphi_\alpha(f)\,\Psi^{(n)}(p_1\alpha_1, \ldots, p_n\alpha_n) =$$
$$= \sqrt{\pi}\Big\{\sqrt{n+1}\int d\Omega_m(p)\,\tilde{f}(p)\,\Psi^{(n+1)}(p\alpha, p_1\alpha_1, \ldots, p_n\alpha_n) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2s(j+1)}\,\tilde{f}(-p_j)\,\mathscr{D}^{(s,\,0)}(\zeta)_{\alpha\alpha_j} \times$$
$$\times \Psi^{(n-1)}(p_1\alpha_1, \ldots, \hat{p}_j\hat{\alpha}_j, \ldots, p_n\alpha_n)\Big\}. \qquad (3\text{-}14)$$

Здесь значок $\hat{}$, стоящий над буквой, означает, что ее нужно опустить, а $\tilde{f}$ определяется формулой

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-ip\cdot x} f(x)\,dx. \qquad (3\text{-}15)$$

Представление неоднородной группы $SL(2, C)$ в данном случае таково:

$$(U(a, A)\,\Psi)^{(n)}(p_1\alpha_1, \ldots, p_n\alpha_n) =$$
$$= \exp\left[i\left(\sum_{j=1} p_j\right)\cdot a\right] \sum_{(\beta)} \prod_{j=1}^{n} \mathscr{D}^{(s,\,0)}(A)_{\alpha_j\beta_j} \times$$
$$\times \Psi^{(n)}(\Lambda^{-1}p_1\beta_1, \ldots, \Lambda^{-1}p_n\beta_n). \qquad (3\text{-}16)$$

В качестве области D можно выбрать, например, те векторы Ψ, для которых вектор $\Psi^{(n)}$ исчезает для всех достаточно больших n и является сужением на гиперболоиды $p_j^2 = m^2$ бесконечно дифференцируемой функции из пространства $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{4n})$. Можно непосредственно убедиться в справедливости аксиом 0, I, II, III и IV для теории, заданной такими определениями; это — упражнение, которое мы очень рекомендуем провести читателю. Для случая спина нуль

представление неоднородной группы $SL(2, C)$ как раз то, которое изображено на рис. 1-3.

Есть поля, отличные от свободных, которые можно построить из свободных полей. Например, рассмотрим поля, которые выражаются в терминах скалярного поля φ посредством предельного процесса

$$:D^{\alpha}\varphi(x)D^{\beta}\varphi(x): = \lim_{x_1, x_2 \to x} [D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\beta}\varphi(x_2) - \\ - (\Psi_0, D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\beta}\varphi(x_2)\Psi_0)]$$

и

$$:D^{\alpha}\varphi(x)D^{\beta}\varphi(x)D^{\gamma}\varphi(x): = \\ = \lim [D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\beta}\varphi(x_2)D^{\gamma}\varphi(x_3) - \\ - (\Psi_0, D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\beta}\varphi(x_2)\Psi_0)D^{\gamma}\varphi(x_3) - \\ - (\Psi_0, D^{\alpha}\varphi(x_1)D^{\gamma}\varphi(x_3)\Psi_0)D^{\beta}\varphi(x_2) - \\ - (\Psi_0, D^{\beta}\varphi(x_2)D^{\gamma}\varphi(x_3)\Psi_0)D^{\alpha}\varphi(x_1)] \tag{3-17}$$

и аналогично для высших степеней φ. [Вспомним определение D^{α} в (2-5).] Нетрудно показать, пользуясь формулой (3-14), что правые части этих выражений действительно определяют поля, удовлетворяющие аксиомам 0, I, II и III с той же областью D, что и само свободное поле, и относящиеся к тому же представлению $U(a, A)$. Законы преобразования этих полей определяются соответственно тензорными индексами α, β или α, β, γ и т. д. При свертывании индексов получаются скалярные поля, например

$$\psi(x) = \varphi(x) + :\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\mu}}:. \tag{3-18}$$

Такие поля иногда называют полиномами Вика. Поле вида (3-18) удовлетворяет, помимо аксиом 0, I, II и III, и аксиоме IV, но оно приводит к той же S-матрице, что и свободное поле. Последнее, как это будет видно из главы 4, имеет место всегда, если теория поля определяется полиномами Вика.

Другую группу примеров полей можно получить, заменив в (3-13) и (3-14) $d\Omega_m(p)$ на $\int\limits_0^{\infty} da\rho(a)\,d\Omega_a(p)$, где $\rho(a)$ — неотрицательная весовая функция. Если только функция $\rho(a)$ отличается от $\delta(a-m)$, такая замена приводит к представлению группы Лоренца, которое отличается от

представления, связанного со свободным полем массы m. Такие поля называются *обобщенными свободными полями*. Как доказано в [4], при определенном выборе функции ρ аксиома IV не выполняется. Отсюда следует, что аксиома IV не зависит от 0, I, II и III.

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что существуют теории поля, в которых для некоторых представлений $\{a, A\} \rightarrow U(a, A)$ поля удовлетворяют аксиомам 0, I, II и III. Существуют также примеры представлений, не содержащих никаких нетривиальных полей, для которых вакуум является циклическим вектором. Например, в том случае, когда представление не содержит значений массы выше некоторого предела. Это — следствие теоремы, доказанной в [15], в которой утверждается, что спектр энергии-импульса в теории поля должен обладать свойством аддитивности. Иначе говоря, если четыре-импульсы p_1 и p_2 принадлежат этому спектру, то ему должен принадлежать и четыре-импульс $(p_1 + p_2)$.

Вполне очевидно, что аксиома III не зависит от аксиом 0, I и II, поскольку нетрудно привести примеры нелокальных полей, удовлетворяющих аксиомам 0, I и II. Наоборот, неоднократно высказывалось мнение, что локальная коммутативность (аксиома III) — это слишком сильное требование, поскольку нет никаких очевидных доводов ни за, ни против одновременной измеримости полей в пространственно-временных точках, разделенных очень малыми расстояниями, скажем порядка 10^{-16} *см*. В этой связи уместно указать на теорему 4-1. Если заменить аксиому III требованием коммутативности полей при больших пространственноподобных интервалах, скажем при $(x - y)^2 < -l^2$ (тем самым вводится элементарная длина), то оно сведется к аксиоме III. Таким образом, при желании существенно ослабить требования аксиомы III необходимо допустить, чтобы коммутатор полей был бы отличен от нуля при всех пространственноподобных интервалах.

Предположение о неприводимости полей, использованное в определении теории поля, предлагалось усилить *аксиомой о временнòм слое*, которая утверждает следующее. Если T — пространственно-временнàя область, лежащая между двумя пространственноподобными поверхностями, то операторы вида $\varphi(f)$ должны образовывать неприво-

димый набор, причем $f = 0$ вне области T. Это утверждение является математически точной заменой некорректного требования неприводимости полей и их производных в заданный момент времени. Здесь мы не будем анализировать аксиому о временном слое. Отметим только, что, как было показано в [3], она сильнее предположения о цикличности вакуума.

Примеры, приведенные в этом разделе, тривиальны в том смысле, что, хотя они удовлетворяют аксиомам 0, I, II и III, они приводят к тривиальной теории рассеяния. Как уже отмечалось во введении, центральная проблема теории поля в настоящий момент состоит в отыскании примеров, нетривиальных в этом смысле.

3-3. СВОЙСТВА ВАКУУМНЫХ СРЕДНИХ

В этом разделе обсуждаются свойства величин

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)\Psi_0), \tag{3-19}$$

где φ_j, $j = 1, \ldots, n$,— компонента неприводимого тензора. Мы будем называть такие величины *вакуумными средними*. Два φ_j могут быть или компонентами различных полей, или одной и той же компонентой одного поля, или могут быть эрмитово сопряжены друг другу. Другими словами, мы рассматриваем все величины такого типа для всех комбинаций произвольных индексов и со всеми перестановками этих индексов.

Чтобы придать смысл этому символу, заметим, что в силу аксиомы I величина

$$(\Psi_0, \varphi_1(f_1)\varphi_2(f_2) \ldots \varphi_n(f_n)\Psi_0) \tag{3-20}$$

существует и представляет собой непрерывный по каждому аргументу полилинейный функционал от аргументов $f_1, \ldots, f_n$, которые заданы в пространстве $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$. Из теоремы о ядре (теорема 2-1) следует, что этот функционал можно единственным образом расширить до обобщенной функции умеренного роста n четыре-векторов $x_1, \ldots, x_n$. Символ (3-19) как раз и обозначает такую обобщенную функцию, которую для частного выбора компонент поля

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (из числа всех компонент), обсуждаемого в данный момент, мы обозначим через

$$\mathcal{W}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\Psi_0, \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n)\Psi_0). \quad (3\text{-}21)$$

При том же выборе индексов через $\mathcal{W}_\pi$ мы будем обозначать «переставленное» (permuted) вакуумное среднее

$$\mathcal{W}_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\Psi_0, \varphi_{i_1}(x_{i_1})\varphi_{i_2}(x_{i_2})\ldots\varphi_{i_n}(x_{i_n})\Psi_0), \quad (3\text{-}22)$$

где π означает перестановку $(1, 2, \ldots, n) \to (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Очевидно, если все компоненты φ_j отличны друг от друга, то существует $n!$ различных функций $\mathcal{W}_\pi$ для каждого выбора компонент. Если же некоторые из φ_j совпадают, число разных функций $\mathcal{W}_\pi$ меньше.

Соображения, использованные выше для придания смысла выражению (3-19) как обобщенной функции, можно применить, чтобы придать смысл выражениям вида

$$\Psi = \int dx_1 \ldots dx_k\, f(x_1, \ldots, x_k)\,\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_k(x_k)\,\Psi_0. \quad (3\text{-}23)$$

Можно найти последовательность функций $\{f_J\}$ вида

$$f_J(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{J} f_1{}^j(x_1)\ldots f_k{}^j(x_k),$$

где $f_i{}^j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$, такую, что $f_J \to f$ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4k})$ при $J \to \infty$. Тогда последовательность состояний

$$\Psi_J = \sum_{j=1}^{J} \varphi_1(f_1{}^j)\,\varphi_2(f_2{}^j)\ldots\varphi_k(f_k{}^j)\,\Psi_0 \quad (3\text{-}24)$$

сходится по норме, и мы принимаем ее предел в качестве определения вектора Ψ вида (3-23). Чтобы доказать сходимость (3-24), рассмотрим

$$\|\Psi_m - \Psi_n\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{j=m}^{j=n} \varphi_1(f_1{}^j)\ldots\varphi_k(f_k{}^j)\Psi_0,\ \sum_{j=m}^{j=n} \varphi_1(f_1{}^j)\ldots\varphi_k(f_k{}^j)\Psi_0\right) =$$

$$= \int \mathcal{W}(y_k, \ldots, y_1, x_1, \ldots, x_k) \times$$

$$\times (\bar{f}_n - \bar{f}_m)(f_n - f_m)\, dx_1 \ldots dx_k\, dy_1 \ldots dy_k,$$

где $\mathscr{W}$ соответствует полям $\varphi_k^* \ldots \varphi_1^* \varphi_1 \ldots \varphi_k$, взятым в таком порядке. Далее, поскольку функция $(\bar{f}_n - \bar{f}_m) \times \times (f_n - f_m)$ стремится к нулю в $\mathscr{S}$, а $\mathscr{W}$ — обобщенная функция умеренного роста, то $\|\Psi_m - \Psi_n\| \to 0$. Тогда, поскольку $\mathscr{H}$ — полное пространство *), последовательность состояний $\{\Psi_m\}$ сходится к предельному состоянию Ψ.

Набор всех векторов вида (3-23) будет обозначаться D_1. Очевидно, любой оператор $\varphi_j(f)$ может быть определен по непрерывности на D_1 соотношением

$$\varphi_j(f)\Psi = \int dx_1 \ldots dx_k\, dx\, f(x) f(x_1, \ldots, x_k) \times \\ \times \varphi_j(x) \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_k(x_k) \Psi_0.$$

Нетрудно проверить, что задание операторов φ_j в области D_0 и справедливость I, II и III в ней приводят к тому, что I, II и III оказываются выполненными и в D_1.

Наши утверждения относительно вакуумных средних сформулируем в виде ряда теорем. Первая из них гласит:

Теорема 3-1

(а) (*Релятивистский закон преобразования*). Предположим, что $\varphi_\alpha, \psi_\beta, \ldots, \chi_\gamma$ — это n полей, преобразующихся по неприводимым представлениям группы $SL(2, C)$, именно,

$$U(a, A)\varphi_\alpha(x) U^{-1}(a, A) = \sum_{\alpha'} S^{(\varphi)}_{\alpha\alpha'}(A^{-1}) \varphi_{\alpha'}(\Lambda x + a) \tag{3-25}$$

[$\psi, \ldots, \chi$ преобразуются посредством $S^{(\psi)}, \ldots \ldots, S^{(\chi)}$ соответственно]. Тогда вакуумные средние для $n = 1, 2, 3, \ldots$ являются обобщенными функциями умеренного роста, преобразующимися согласно соотношению

$$\sum_{\alpha', \beta', \ldots, \gamma'} S^{(\varphi)}_{\alpha\alpha'}(A) S^{(\psi)}_{\beta\beta'}(A) \ldots S^{(\chi)}_{\gamma\gamma'}(A) \times \\ \times (\Psi_0, \varphi_{\alpha'}(x_1) \psi_{\beta'}(x_2) \ldots \chi_{\gamma'}(x_n) \Psi_0) = \\ = (\Psi_0, \varphi_\alpha(\Lambda x_1 + a) \psi_\beta(\Lambda x_2 + a) \ldots \chi_\gamma(\Lambda x_n + a) \Psi_0). \tag{3.26}$$

---

*) См. раздел 2-6.

Доказательство

Как отмечалось ранее, вакуумные средние в силу теоремы о ядре являются обобщенными функциями умеренного роста. Если воспользоваться (3-25) с A^{-1} вместо A и свойством $U(a, A)\Psi_0 = \Psi_0$ [см. (3-1)], то соотношение (3-26) следует немедленно. ∎

Теорема 3-2

Предположим, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — любые компоненты любых полей и функции $\mathcal{W}$ определены согласно (3-21). Тогда

(*b*) (*Спектральные условия*). Существуют обобщенные функции умеренного роста $W(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, зависящие от относительных координат

$$\xi_j = x_j - x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \quad (3\text{-}27)$$

которые удовлетворяют равенству

$$\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n) = W(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}). \quad (3\text{-}28)$$

Фурье-образы функций $\mathcal{W}$ и W представляют собой обобщенные функции умеренного роста, определяемые формулами

$$\tilde{\mathcal{W}}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \int \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) \mathcal{W}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \quad (3.29)$$

$$\tilde{W}(q_1, \ldots, q_{n-1}) = \int \exp\left(i \sum_{j=1}^{n-1} q_j \xi_j\right) W(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \quad (3\text{-}30)$$

и связанные между собой равенством

$$\tilde{\mathscr{W}}(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^4 \delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_j\right) \times$$
$$\times \tilde{W}(p_1, p_1 + p_2, \ldots, p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}). \quad (3\text{-}31)$$

Далее имеет место равенство

$$\tilde{W}(q_1, \ldots, q_{n-1}) = 0, \quad (3\text{-}32)$$

если хоть одно из q не принадлежит спектру энергии-импульса состояний.

(*c*) (*Условия эрмитовости*)

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n)\Psi_0) =$$
$$= \overline{(\Psi_0, \varphi_n{}^*(x_n)\ldots\varphi_2{}^*(x_2)\varphi_1{}^*(x_1)\Psi_0)}. \quad (3\text{-}33)$$

(*d*) (*Условия локальной коммутативности*)

$$\mathscr{W}_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= (-1)^m \mathscr{W}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (3\text{-}34)$$

если разности $x_k - x_j$ пространственноподобных для всех j и k, которые меняются местами при перестановке π. Здесь функция $\mathscr{W}_\pi$ определена в (3-22), а m — число перестановок антикоммутирующих полей, необходимое для перехода от последовательности индексов $(1, 2, \ldots, n)$ к последовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Доказательство

Из аргументов, приведенных в разделе 2-1, следует, что в силу трансляционной инвариантности функция $\mathscr{W}$ зависит только от разностей $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, или более точно, что существует обобщенная функция умеренного роста W,

удовлетворяющая (3-28). Очевидно, что

$$\int dx_1 \ldots dx_n \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) \mathcal{W}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \int dx_1 \ldots dx_n \exp\{i[p_1(x_1 - x_2) + (p_1 + p_2)(x_2 - x_3) + \ldots$$

$$\ldots + (p_1 + \ldots + p_{n-1})(x_{n-1} - x_n)]\} \times$$

$$\times \exp\left[\left(i \sum_{j=1}^{n} p_j\right) x_n\right] W(x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n) =$$

$$= (2\pi)^4 \delta\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right) \widetilde{W}(p_1, p_1 + p_2, \ldots, p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}).$$

Как было объяснено в разделе 2-6, для любых двух состояний Φ и Ψ имеем:

$$\int e^{-ipa}\, da\, (\Phi, U(a, 1)\Psi) = 0,$$

если вектор p не принадлежит спектру энергии-импульса состояний. Следовательно,

$$\int e^{ipa}\, da\, (\Psi_0, \varphi_1(f_1) \ldots \varphi_j(f_j) U(-a, 1) \times$$
$$\times \varphi_{j+1}(f_{j+1}) \ldots \varphi_n(f_n) \Psi_0) = 0,$$

откуда следует

$$\int e^{ipa}\, W(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j + a, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{n-1})\, da = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

для всех p, не принадлежащих физическому спектру. Иначе говоря, $\widetilde{W}(q_1, \ldots, q_{n-1}) = 0$, если хотя бы один вектор q_j не принадлежит к физическому спектру.

(*c*) Это соотношение немедленно следует из равенства

$$(\Psi_0, \varphi_1(f_1) \ldots \varphi_n(f_n) \Psi_0) = [\overline{(\Psi_0, (\varphi_n(f_n))^* \ldots (\varphi_1(f_1))^* \Psi_0)}]$$

и того факта, что это равенство можно продолжить с основных функций вида $f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ на все функции из пространства $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$.

(d) Это соотношение немедленно следует из аксиомы III, если вновь воспользоваться продолжением его с произведения основных функций на все функции из пространства $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$. ▮

Следующее свойство вытекает из условия положительной определенности скалярного произведения в гильбертовом пространстве.

Теорема 3-3

(e) (*Условия положительной определенности*). Для любой последовательности $\{f_j\}$ основных функций $f_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{4j})$ с $f_j = 0$, кроме как для конечного числа индексов j, вакуумные средние удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j,\,k=0}^{\infty} \int \ldots \int \bar{f}_j(x_1, \ldots, x_j) \times$$
$$\times \mathcal{W}_{jk}(x_j, x_{j-1}, \ldots, x_1, y_1, \ldots, y_k) f_k(y_1, \ldots, y_k) \times$$
$$\times dx_1 \ldots dx_j \, dy_1 \ldots dy_k \geqslant 0. \qquad (3\text{-}35)$$

В (3-35) через $\mathcal{W}_{jk}$ обозначено выражение

$$(\Psi_0, \varphi_{jj}^{*}(x_j) \ldots \varphi_{j1}^{*}(x_1) \varphi_{k1}(y_1) \ldots \varphi_{kk}(y_k) \Psi_0),$$

где компоненты поля, помеченные индексами jk, могут быть выбраны произвольным способом среди всех компонент поля в рассматриваемой теории. Кроме того, если для любой последовательности $f_0, f_1, \ldots$ в (3-35) имеет место знак равенства, то *) равенство нулю должно сохраняться также при любой последовательности $\{g_j\}$ вида

$$g_0 = 0, \; g_1 = g(x_1) f_0,$$
$$g_2 = g(x_1) f_1(x_2), \; g_3 = g(x_1) f_2(x_2, x_3), \ldots \qquad (3\text{-}36)$$

для каждой основной функции g.

---

*) На стр. 170 показано, что это следует из (3-35) и других аксиом.

Доказательство

Неравенства (3-35) служат выражением того факта, что норма состояния

$$\Psi = f_0\Psi_0 + \varphi_{11}(f_1)\Psi_0 + \int \varphi_{21}(x_1)\varphi_{22}(x_2) f_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \Psi_0 + \ldots$$
$$\ldots + \int \varphi_{j1}(x_1)\varphi_{j2}(x_2)\ldots\varphi_{jj}(x_j) f_j(x_1, \ldots, x_j)\, dx_1 \ldots dx_j \Psi_0 + \ldots$$

неотрицательна. Если норма равна нулю, то $\Psi = 0$ и поэтому $\varphi_\alpha(g)\Psi = 0$ для любой компоненты φ_α и любой основной функции g. Поэтому выражение (3-35) должно давать нуль также и для последовательности (3-36). ∎

Как мы увидим в следующем разделе, условия (a) — (e) — это достаточные условия, гарантирующие, что набор обобщенных функций умеренного роста представляет собой совокупность вакуумных средних в какой-либо теории поля, удовлетворяющей аксиомам 0, I, II и III, за исключением требования единственности вакуума. Следующая теорема, как мы увидим в разделе 3-4, дает дополнительное условие, обеспечивающее это свойство.

Теорема 3-4 (*Свойство разложения на пучки*)

Если a — пространственноподобный вектор, то

$$\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_j,\ x_{j+1} + \lambda a, x_{j+2} + \lambda a, \ldots, x_n + \lambda a) \to$$
$$\to \mathcal{W}(x_1, \ldots, x_j)\,\mathcal{W}(x_{j+1}, \ldots, x_n) \quad (3\text{-}37)$$

при $\lambda \to \infty$ в смысле сходимости в $\mathcal{S}'$.

Замечание

Мы докажем эту теорему только для теории, в которой нет состояний, кроме вакуума, с массой, меньшей некоторого положительного порога M (который может быть сколь угодно мал). Про такие теории говорят, что в них имеется *массовая щель*. Если в теории есть частицы с массой нуль, то, хотя никакой массовой щели уже нет, (3-37) выполняется. Однако в этом случае доказательство технически

более сложно. Утверждение (3-37) можно также доказать, не предполагая аксиомы III. (Дальнейшие сведения см. в [5, 7, 9-11].)

Доказательство

Доказательство основывается на очень простом соображении, принадлежащем Д. Рюэлю. В нем используется то обстоятельство, что при больших λ операторы, входящие в (3-37), можно переписать в порядке $x_{j+1}+\lambda a, \ldots, x_n+\lambda a$. $x_1, \ldots, x_j$, что приводит от силы к изменению знака функции. Это обращение порядка операторов приводит к перемене знака импульса, канонически сопряженного разностной переменной $x_j - x_{j+1}$. Это изменение знака позволяет при доказательстве теоремы воспользоваться спектральным условием по этому вектору импульса. Ниже следуют подробности.

Для удобства выберем $a^2 = -1$. Это можно сделать без потери общности, изменяя масштаб λ. Фурье-образы обобщенных функций

$$F_1 = \mathcal{W}(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}+\lambda a, \ldots, x_n+\lambda a) - \\ - \mathcal{W}(x_1, \ldots, x_j)\,\mathcal{W}(x_{j+1}, \ldots, x_n),$$
$$F_2 = \mathcal{W}(x_{j+1}+\lambda a, \ldots, x_n+\lambda a, x_1, \ldots, x_j) - \\ - \mathcal{W}(x_1, \ldots, x_j)\,\mathcal{W}(x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

в силу свойства (b) равны нулю, если только вектор $P = p_1 + \ldots + p_j$ не лежит в будущем или прошедшем конусах соответственно. Если существует единственное вакуумное состояние Ψ_0, то произведение $\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_j) \times \mathcal{W}(x_{j+1}, \ldots, x_n)$ не содержит вклада этого состояния в начале спектра $P^\mu = 0$. Поэтому получается, что $\tilde{F}_1 \pm \tilde{F}_2 = 0$, если только не $P^2 \geqslant M^2$. При фиксированных $x_1, \ldots, x_n$ в силу свойства локальности при достаточно больших λ функции F_1 и F_2 совпадают друг с другом с точностью до знака. Из раздела 2-1 мы знаем, что функция $F_1 \pm F_2$ представляет собой конечную сумму производных от полиномиально ограниченной непрерывной функции, скажем G. Тем самым для любой основной функции $h \in \mathcal{S}$

$$\int (F_1 \pm F_2)(x_1, \ldots, x_n)\, h(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \\ = \int D^m G(\lambda, x_1, \ldots, x_n)\, h(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Воспользуемся теперь полиномиальной ограниченностью функции G по всем переменным, т. е. тем, что

$$|G| \leqslant G_0 \lambda^N R^Q \text{ при достаточно больших } \lambda \text{ и } R,$$

где под R подразумевается *евклидова* норма в $\mathbf{R}^{4n}$, по которой берется интеграл, т. е.

$$R^2 = \sum_j [(x_j^0)^2 + (\mathbf{x}_j)^2].$$

Пользуясь свойством локальной коммутативности, мы можем выбрать и так выберем знак $\pm$, чтобы $D^m G = 0$ для больших λ. Нам потребуется более количественная формулировка этого утверждения: $D^m G = 0$ при $R < R_0$, где R_0 — положительное число, кратное λ. Чтобы определить R_0, заметим, что

$$(x_i - x_k - \lambda a)^2 = (x_i^0 - x_k^0)^2 - (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^2 - \lambda^2 - \\ -2\lambda(a^0(x_i^0 - x_k^0) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)) < |x_i^0|^2 + |x_k^0|^2 + \\ + 2|x_i^0||x_k^0| - \lambda^2 + 2\lambda(|a^0|(|x_i^0| + |x_k^0|) + \\ + |\mathbf{a}|(|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_k|)),$$

так что если

$$R^2 = \sum_{j=1}^{n} [(x_j^0)^2 + \mathbf{x}_i^2] < R_0^2,$$

то

$$(x_i - x_k - \lambda a)^2 < 4R_0^2 - \lambda^2 + 4\lambda R_0(|a^0| + |\mathbf{a}|).$$

Правая сторона этого неравенства меньше нуля для всех положительных λ, если в качестве R_0 выбрано достаточно малое число, кратное λ, например $R_0 = {}^1/_8[|a^0| + |\mathbf{a}|]^{-1}\lambda$. Из этой оценки следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\left| \int D^m G(\lambda, x_1, \ldots, x_n) h(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{R > R_0 - \varepsilon} D^m G(\lambda, x_1, \ldots, x_n) h(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{R > R_0 - \varepsilon} G(\lambda, x_1, \ldots, x_n) D^m h(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R > R_0 - \varepsilon} |G|\, |D^m h|\, R^{4n-1}\, dR\, d\omega,$$

где в последнем выражении мы перешли к полярным координатам. Поскольку неравенство $|D^m h| < cR^{-q}$ справедливо при любом q, произвольном c и достаточно большом R, то правая часть предыдущего неравенства ограничена выражением

$$\int\limits_{R > R_0} G_0\, c\lambda^N R^{Q-q+4n-1}\, dR\, d\omega$$

для всех достаточно больших λ. Для достаточно больших q этот интеграл сходится и приводит к

$$\left| \int (D^m G) h \right| < \frac{c_1}{\lambda^p}$$

для всех p, некоторого c_1 и всех достаточно больших λ. Это и означает, что

$$\lambda^p (F_1 \pm F_2)(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1} + \lambda a, \ldots, x_n + \lambda a) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty$$

в смысле сходимости в $\mathcal{S}'$.

Заключительный шаг доказательства состоит в том, чтобы показать, что последнее соотношение выполняется отдельно для функций F_1 и F_2 и как раз в этом месте используется спектральное условие. Заменим функцию h из предыдущих рассуждений новой функцией h_1, которая определяется равенством $\tilde{h}_1 = \theta \tilde{h}$, где θ — бесконечно дифференцируемая функция переменной $P = \sum\limits_{k=1}^{j} p_k$, равная 1 при $P^2 \geqslant M^2$, $P^0 > 0$ и равная 0 при $P^0 \leqslant 0$. Очевидно, $h_1 \in \mathcal{S}$, так что предыдущие рассуждения в равной мере справедливы и для нее. Однако

$$\int F_2 h_1 dx_1 \ldots dx_n = 0 \quad \text{и} \quad \int F_1 h_1 dx_1 \ldots dx_n = \int F_1 h\, dx_1 \ldots dx_n,$$

откуда следует требуемый результат (3-37). ∎

Физический смысл свойства разложения на пучки состоит в том, что, когда две системы, расположенные в точках x и y, оказываются разделенными большим пространственноподобным интервалом, взаимодействие между ними стремится к нулю. Способ доказательства, который мы применили, показывает, что если существует массовая щель, то интересующий нас предел достигается быстрее, чем любая степень $1/\lambda$. Можно показать, что спадание происходит экспоненциально, причем фактор затухания зависит от величины пороговой массы M. Если в теории присутствуют частицы с нулевой массой, то стремление к пределу может происходить как $1/\lambda^2$. Это как раз закон Кулона!

Если поле имеет двойные компоненты, так что имеет смысл (1-52), то можно сформулировать требование, чтобы $U(I_s)$ и $U(C)$ были унитарными операторами, подставляя эти законы преобразования для каждой компоненты в произведении полей, входящих в (3-23), и потребовав, чтобы все скалярные произведения оставались инвариантными. Это приводит к новым свойствам $\mathscr{W}$. Например, если зарядовое сопряжение определяет симметрию, то

$$(\Psi_0, \varphi_{(\alpha)(\dot\beta)}(x_1)\ldots\psi_{(\mu)(\dot\nu)}(x_n)\Psi_0) = (\Psi_0, \varphi^*_{(\dot\alpha)(\beta)}(x_1)\ldots\psi^*_{(\dot\mu)(\nu)}(x_n)\Psi_0) \tag{3-38}$$

выполнено для всех произведений во всех порядках. Соотношение (3-38) представляет собой новое ограничение на $\mathscr{W}$, и его не следует смешивать с правилом образования эрмитово сопряженной функции (3-33). Если Θ есть симметрия теории, то из (1-53), поскольку Θ антиунитарно, получатся соотношения

$$(\Psi_0, \varphi_{(\alpha)(\dot\beta)}(x_1)\ldots\psi_{(\mu)(\dot\nu)}(x_n)\Psi_0) = \overline{i^F(-1)^J(\Psi_0, \varphi^*_{(\alpha)(\dot\beta)}(-x_1)\ldots\psi^*_{(\mu)(\dot\nu)}(-x_n)\Psi_0)}, \tag{3-39}$$

где F — полное число полей с полуцелым спином, а J — полное число индексов без точек в совокупности $(\alpha), \ldots, (\mu)$.

Аналогичным образом могут быть найдены соотношения, подобные (3-38) и (3-39), если I_s и I_t определяют симметрию.

Введем теперь важную технику изучения локальных полей; свяжем вакуумные средние с голоморфными функциями.

Теорема 3-5

Функции $\mathscr{W}$ и W являются граничными значениями голоморфных функций в следующем смысле. Существуют голоморфные функции $\boldsymbol{\mathscr{W}}$ и $\mathbf{W}$ такие, что

$$\boldsymbol{\mathscr{W}}(z_1, \ldots, z_n) = \\ = \mathbf{W}(z_1 - z_2, z_2 - z_3, \ldots, z_{n-1} - z_n)$$

и $\mathbf{W}$ голоморфна по переменным $\zeta_j = \xi_j - i\eta_j = z_j - z_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n$, причем областью голоморфности является труба

$$\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1} | \eta_j \in V_+\},$$

и

$$W(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \\ = \lim_{\eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \to 0} \mathbf{W}(\xi_1 - i\eta_1, \ldots, \xi_{n-1} - i\eta_{n-1}),$$

где предел понимается в смысле сходимости в $\mathscr{S}'$. Кроме того, функция $\mathbf{W}$ полиномиально ограничена *) в $\mathscr{T}_{n-1}$. Голоморфная функция $\mathbf{W}$ обладает однозначным продолжением в расширенную трубу $\mathscr{T}'_{n-1}$.

Доказательство

Поскольку функция $\widetilde{W}(q_1, \ldots, q_{n-1}) = 0$, если только каждая из переменных q не лежит в будущем конусе, то ее преобразование Лапласа

$$\mathbf{W}(\xi_1 - i\eta_1, \ldots, \xi_{n-1} - i\eta_{n-1}) = (2\pi)^{-4(n-1)} \int \ldots \int dq_1 \ldots \\ \ldots dq_{n-1} \exp\left[-i \sum (\xi_j - i\eta_j) q_j\right] \widetilde{W}(q_1, \ldots, q_{n-1})$$

*) Определение дано в разделе 2-3.

есть голоморфная функция согласно теореме 2-8. Другие утверждения, кроме последнего, следуют из той же теоремы.

Чтобы показать, что каждое вакуумное среднее имеет однозначное продолжение в гораздо более широкую область, именно в расширенную трубу $\mathscr{T}'_{n-1}$, мы воспользуемся требованием релятивистской инвариантности. Рассмотрим (3-26)

$$\sum_{\alpha'\beta'\gamma'} S^{(\varphi)}_{\alpha\alpha'}(A)S^{(\psi)}_{\beta\beta'}(A)\ldots S^{(\chi)}_{\gamma\gamma'}(A)\,(\Psi_0, \varphi_{\alpha'}(x_1)\psi_{\beta'}(x_2)\ldots$$
$$\ldots\chi_{\gamma'}(x_n)\Psi_0) = (\Psi_0, \varphi_\alpha(Ax_1+a)\psi_\beta(Ax_2+a)\ldots$$
$$\ldots\chi_\gamma(Ax_n+a)\Psi_0).$$

Его левая часть имеет продолжение на комплексную группу Λ, и она дает продолжение правой части в соответствии с

$$\sum_{\alpha'\beta'\gamma'} (\Psi_0, \varphi_{\alpha'}(x_1)\psi_{\beta'}(x_2)\ldots\chi_{\gamma'}(x_n)\Psi_0)\times$$
$$\times S^{(\varphi)}_{\alpha\alpha'}(A, B)S^{(\psi)}_{\beta\beta'}(A, B)\ldots S^{(\chi)}_{\gamma\gamma'}(A, B) =$$
$$= (\Psi_0, \varphi_\alpha(\Lambda(A, B)x_1+a)\psi_\beta(\Lambda(A, B)x_2+a)\ldots$$
$$\ldots\chi_\gamma(\Lambda(A, B)x_n+a)\Psi_0).$$

Это продолжение определяет правую часть соотношения для всех точек $\Lambda(A,B)x_j$ с $(x_j - x_{j+1})\in\mathscr{T}_{n-1}$, если A и B изменяются по $SL(2, C)\otimes SL(2, C)$. Полученное продолжение однозначно в силу теоремы 2-11. Итак, функция $\mathbf{W}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ может быть продолжена в расширенную трубу $\mathscr{T}'_{n-1}$. ▌

Важным частным случаем оказывается случай $\Lambda = -1$, связанный в комплексной группе Лоренца с $\Lambda = 1$. В силу (1-27) $S^{(\varphi)}(-1, 1) = (-1)^j$, где j — число индексов без точек поля φ. Поэтому если J — полное число индексов без точек полей, входящих в функцию W, то получается:

$$\mathbf{W}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = (-1)^J\mathbf{W}(-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_{n-1}), \quad (3\text{-}40)$$

что выполняется для всех точек голоморфности. Следует

подчеркнуть, что равенство (3-40) имеет место, даже если P, C и T не являются симметриями в теории, поскольку оно следует только из инвариантности относительно группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ и гипотезы о спектре масс состояний.

Заключительная теорема связывает функцию $\mathbf{W}$ с голоморфной функцией $\mathbf{W}_\pi$, определенной аналогично $\mathbf{W}$, но с переставленными полями.

Теорема 3-6

Предположим, что $W(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = (\Psi_0, \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n))$, $\xi_j = x_j - x_{j+1}$ и $W_\pi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) =$

$$= (\Psi_0, \varphi_{i_1}(x_{i_1})\varphi_{i_2}(x_{i_2})\ldots\varphi_{i_n}(x_{i_n})\Psi_0),$$

где π обозначает перестановку $(1,2,\ldots,n) \to (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Далее предположим, что $\mathbf{W}$ и $\mathbf{W}_\pi$ — голоморфные функции, определяемые предыдущей теоремой. Тогда функции $\mathbf{W}$ и $\mathbf{W}_\pi$ продолжают одна другую как единая голоморфная функция.

Доказательство

Предположим, что точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что все разности $x_i - x_j$ пространственноподобны *). Тогда в силу свойства локальной коммутативности функции W и W_π совпадают в вещественной окрестности такой точки. Нам остается только показать, что это — точки голоморфности обеих функций. Проще всего это можно сделать, воспользовавшись теоремой об острие клина. Рассмотрим обобщенную функцию

$$W' = (\Psi_0, \varphi_n(x_n)\ldots\varphi_2(x_2)\varphi_1(x_1)\Psi_0).$$

Тогда соответствующая голоморфная функция $\mathbf{W}'$ по предыдущей теореме голоморфна, если $-\eta_j \in V_+$. Далее, граничные значения функций $\mathbf{W}'$ и $\mathbf{W}$ в полностью пространственноподобных точках совпадают. Поэтому в силу

*) В этом случае говорят, что $(x_1, \ldots, x_n)$ является *полностью пространственноподобной точкой.*

теоремы об острие клина функция W голоморфна в таких точках. ∎

Доказательство этой теоремы также следует непосредственно из того факта, что расширенная труба и переставленные расширенные трубы имеют общую действительную окрестность (см. рис. 2-4).

Вакуумные средние в теории свободного поля могут быть вычислены непосредственно из определения операторов поля (3-14). Например, для эрмитова скалярного поля состояние Ψ_0 представимо в виде $(1, 0, 0, \ldots)$, а состояние $\varphi(f)\Psi_0$ — в виде $\sqrt{\pi}(0, \tilde{f}(p), 0, \ldots)$. Тогда скалярное произведение имеет вид

$$(\Psi_0, \varphi(f)\varphi(g)\Psi_0) = \pi \int \bar{\tilde{f}}(p)\tilde{g}(p)\,d\Omega\,\theta(p_0) = $$

$$= 2\pi \int \bar{\tilde{f}}(p)\tilde{g}(p)\,\theta(p_0)\,\delta(p^2 - m^2)\,d^4p.$$

Оно ведет себя как обобщенная функция

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \frac{1}{i}\Delta^+(x-y;\ m),$$

где

$$\Delta^+(x;\ m) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \theta(p_0)\,\delta(p^2 - m^2)\,e^{-ipx}\,d^4p.$$

Повторное применение (3-14) дает:

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{\text{разбиения}} \dfrac{1}{i}\Delta^+(x_{i_1} - x_{i_2})\dfrac{1}{i}\Delta^+(x_{i_3} - x_{i_4})\ldots \\ \ldots\dfrac{1}{i}\Delta^+(x_{i_{n-1}} - x_{i_n}), & n \text{ — четное,} \\ 0, & n \text{ — нечетное,} \end{cases} \tag{3.41}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям n точек на $n/2$ групп из двух элементов вида $(i_1 i_2)(i_3 i_4)\ldots(i_{n-1} i_n)$ с $i_{2k-1} < i_{2k}$. Доказательство справедливости (3-41) мы оставляем читателям. Изучение свойств голоморфных функций W в теории поля называется *линейной программой*. Современный обзор результатов этого направления можно найти

в [12]. Основная идея состоит в том, что как только мы вычислим явно область голоморфности, мы можем выразить функцию W через ее граничные значения, воспользовавшись обобщенной интегральной формулой Коши. Надежда возлагается на то, что исследование таких интегральных представлений легче, чем непосредственное изучение операторных обобщенных функций, удовлетворяющих требованию локальной коммутативности. Полная характеристика функций W со свойствами, заданными различными теоремами этого раздела, важна, поскольку, как показывает теорема реконструкции (теорема 3-7), эти функции могут быть использованы для построения теории поля, удовлетворяющей всем аксиомам, кроме аксиомы асимптотической полноты. Исследование последнего свойства приводит к нелинейным интегральным уравнениям, связывающим различные вакуумные средние. Тем самым мы приходим к *нелинейной программе* (см. [16]).

3-4. ТЕОРЕМА РЕКОНСТРУКЦИИ: ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ ПО ЕЕ ВАКУУМНЫМ СРЕДНИМ

Ниже мы приведем полное доказательство теоремы реконструкции только для теории эрмитова скалярного поля. Для общей теории поля эта теорема также справедлива, но чтобы записать соответствующее доказательство, потребовалось бы ввести громоздкую систему обозначений.

Теорема 3-7

Пусть $\{\mathscr{W}^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность обобщенных функций умеренного роста, причем функции $\mathscr{W}^{(n)}$ зависят от n четыре-векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Предположим, что эти $\mathscr{W}^{(n)}$ обладают свойством разложения на пучки, сформулированным в теореме 3-4, и свойствами (a)—(b), сформулированными в теоремах 3-1, 3-2 и 3-3, соответствующим образом конкретизированными для случая эрмитова скалярного

поля. Иначе говоря,

$$\lim_{\lambda\to\infty}[\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}+\lambda a, \ldots, x_n+\lambda a)- \\ -\mathcal{W}(x_1, \ldots, x_j)\mathcal{W}(x_{j+1}, \ldots, x_n)]=0,$$

если a — пространственноподобный четыре-вектор.

(*a*) (*Релятивистский закон преобразования*)

$$\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \\ =\mathcal{W}^{(n)}(\Lambda x_1+a, \Lambda x_2+a, \ldots, \Lambda x_n+a), \\ \Lambda\in L_+^{\uparrow} \qquad (3\text{-}42)$$

(*b*) (*Спектральные условия*)

$$\widetilde{\mathcal{W}}^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)=(2\pi)^4\delta\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\right)\times \\ \times\widetilde{W}(p_1, p_1+p_2, \ldots, p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}) \qquad (3\text{-}43)$$

и

$$\widetilde{W}^{(n)}(q_1, \ldots, q_{n-1})=0, \text{ если хоть один из } q_i\not\subset\mathbf{V}_+. \qquad (3\text{-}44)$$

(*c*) (*Условия эрмитовости*)

$$\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)=\overline{\mathcal{W}^{(n)}(x_n, \ldots, x_1)}. \qquad (3\text{-}45)$$

(*d*) (*Условия локальной коммутативности*)

$$\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)= \\ =\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \ldots, x_{j+1}, x_j, \ldots, x_n),$$

если

$$(x_j-x_{j+1})^2<0 \text{ для } j=1, 2, \ldots, (n-1). \qquad (3\text{-}46)$$

(*e*) (*Условия положительной определенности*)

$$\sum\int\ldots\int dx_1\ldots dx_n\,dy_1\ldots dy_n\overline{f_j(x_1, \ldots, x_j)}\times \\ \times\mathcal{W}^{(j+k)}(x_j, \ldots, x_1, y_1, \ldots, y_k)f_k(y_1, \ldots, y_k)\geqslant 0 \qquad (3\text{-}47)$$

для любых конечных последовательностей f_0, $f_1(x_1)$, $f_2(x_1, x_2)$, ... основных функций.

Тогда существуют сепарабельное *) гильбертово пространство $\mathscr{H}$, непрерывное унитарное представление $U(a, \Lambda)$ группы $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$ в $\mathscr{H}$, единственное состояние Ψ_0, инвариантное относительно $U(a, \Lambda)$, и эрмитово скалярное поле φ с областью определения D_1, принадлежащее к представлению $U(a, \Lambda)$ группы $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$ и такое, что

$$(\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \Psi_0) = \mathscr{W}^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Кроме того, любая другая теория поля с теми же вакуумными средними унитарно эквивалентна данной теории. Иными словами, если $\mathscr{H}_1$ — гильбертово пространство, $\{a, \Lambda\} \to U_1(a, \Lambda)$ — непрерывное унитарное представление группы $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$ в нем, Ψ_{01} — единственный вектор в $\mathscr{H}_1$, инвариантный относительно $U_1(a, \Lambda)$, а поле $\varphi_1(x)$ — скалярное поле, определенное в области D_{11} и обладающее свойством

$$(\Psi_{01}, \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_1(x_n) \Psi_{01}) = \mathscr{W}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n),$$

причем для этого поля Ψ_{01} является циклическим вектором, то существует унитарное преобразование V, переводящее $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}_1$, такое, что

$$\Psi_{01} = V\Psi_0, \quad U_1(a, \Lambda) = VU(a, \Lambda) V^{-1},$$
$$\varphi_1(h) = V\varphi(h) V^{-1}, \quad D_{11} = VD_1.$$

Доказательство теоремы реконструкции **)

Чтобы сконструировать гильбертово пространство $\mathscr{H}$, мы будем исходить из векторного пространства H, образованного всеми последовательностями вида $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, где f_0 — любая комплексная постоянная, $f_k \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{4k})$, $k = 1, 2, \ldots$, и все основные функции f_k, кроме конечного числа их, равны нулю. Сложение и умножение на комплексные числа определены обычным образом:

$$(f_0, f_1, \ldots) + (g_0, g_1, \ldots) = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, \ldots),$$

*) Определение см. в разделе 2-6.

**) В этом доказательстве через h будет обозначаться основная функция из $\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$, а через f и g — элементы H, определенного ниже.

и

$$\alpha(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (\alpha f_0, \alpha f_1, \alpha f_2, \ldots).$$

Умножение на числа коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения.

Далее введем скалярное произведение, определенное для пар векторов из рассматриваемого векторного пространства

$$(f, g) = \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_j\, dy_1 \ldots dy_k\, \overline{f_j(x_1, \ldots, x_j)} \times \\ \times \mathcal{W}^{(j+k)}(x_j, \ldots, x_1, y_1, \ldots, y_k)\, g_k(y_1, \ldots, y_k), \quad (3\text{-}48)$$

где по определению $\mathcal{W}^{(0)} \equiv 1$. Определенное таким способом скалярное произведение обладает в силу условия эрмитовости (3-45) для $\mathcal{W}$ требуемым свойством

$$(f, g) = \overline{(g, f)}.$$

Его линейность относительно g и антилинейность относительно f очевидны из определения (3-48). Кроме того, из условий положительной определенности (3-47) следует, что $\|f\|^2 = (f, f) \geqslant 0$. Выражение $\|f\|$ называется нормой вектора f. Определим теперь линейное преобразование $U(a, \Lambda)$ векторного пространства посредством соотношения

$$U(a, \Lambda)(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (f_0, \{a, \Lambda\} f_1, \{a, \Lambda\} f_2, \ldots),$$

где

$$\{a, \Lambda\} f_k(x_1, \ldots, x_k) = f_k(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_k - a)). \quad (3\text{-}49)$$

Если обозначить вектор $(1, 0, 0, \ldots)$ через Ψ_0, то, очевидно, будет выполняться равенство

$$U(a, \Lambda)\Psi_0 = \Psi_0.$$

В силу релятивистского закона преобразования (3-42) функций $\mathcal{W}$ введенное выше скалярное произведение инвариантно относительно преобразования $U(a, \Lambda)$, которое является представлением группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$, т. е.

$$U(a_1, \Lambda_1)\, U(a_2, \Lambda_2) = U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2).$$

Последнее нетрудно доказать, если воспользоваться (3-49).

Для каждой основной функции h введем линейный оператор $\varphi(h)$ согласно соотношению

$$\varphi(h)\{f_0, f_1, f_2, \ldots\} = (0, hf_0, h\otimes f_1, h\otimes f_2, \ldots), \qquad (3\text{-}50)$$

где

$$(h\otimes f_k)(x_1, \ldots, x_{k+1}) = h(x_1) f_k(x_2, x_3, \ldots, x_{k+1})$$

также, очевидно, основная функция. То, что $\varphi(h)$ обладает трансформационными свойствами

$$U(a, \Lambda)\varphi(h) U(a, \Lambda)^{-1} = \varphi(\{a, \Lambda\}h), \qquad (3\text{-}51)$$

немедленно следует из выкладки:

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda)\varphi(h)(f_0, f_1, \ldots) &= U(a, \Lambda)(0, hf_0, h\otimes f_1, \ldots) = \\ &= (0, \{a, \Lambda\}hf_0, \{a, \Lambda\}h\otimes\{a, \Lambda\}f_1, \ldots) = \\ &= \varphi(\{a, \Lambda\}h)(f_0, \{a, \Lambda\}f_1, \ldots) = \\ &= \varphi(\{a, \Lambda\}h) U(a, \Lambda)(f_0, f_1, \ldots). \end{aligned}$$

Как функционалы h матричные элементы вида $(f, \varphi(h)g)$ являются обобщенными функциями умеренного роста, поскольку они представляют собой конечные суммы функций $\mathcal{W}$ и также

$$(\varphi(\bar{h})f, g) = (f, \varphi(h)g). \qquad (3\text{-}52)$$

Проведенное построение предоставило нам Ψ_0, $U(a, \Lambda)$, $\varphi(h)$ и векторное пространство H, но это пространство не обязано быть гильбертовым пространством. Оно может иметь два существенных недостатка. Во-первых, в скалярном произведении (3-48) могут оказаться векторы с нулевой нормой. Во-вторых, пространство H может не быть полным *). Мы устраним эти недостатки по очереди. Читатель, знакомый со стандартной математической операцией пополнения предгильбертова пространства до гильбертова, может опустить большую часть из последующих нескольких абзацев, в которых главным образом кратко описаны необходимые построения.

Прежде всего отметим, что набор $H_0 \subset H$ всех векторов с нулевой нормой образует изотропное подпространство, т. е. подпространство, в котором каждый вектор ортогона-

*) Определение см. в разделе 2-6.

лен любому другому вектору. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если $\|f\| = 0$, то для любой функции g в силу неравенства Шварца (которое справедливо, если скалярное произведение не отрицательно)

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \, \|g\| = 0. \qquad (3\text{-}53)$$

Таким образом, если векторы $f = (f_0, f_1, \ldots)$ и $g(g_0, g_1, \ldots)$ имеют нулевую норму, то вектор f ортогонален вектору g и вектор $\alpha f + \beta g$ также имеет нулевую норму. Образуем теперь классы эквивалентности последовательностей вида $f = (f_0, f_1, \ldots)$. При этом две последовательности называются эквивалентными, если они отличаются на последовательность с нулевой нормой. Эти классы эквивалентности образуют естественным путем векторное пространство, которое обычно обозначают H/H_0 и в котором скалярное произведение положительно определенно. Если $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ — два класса эквивалентности, то мы просто определим $\alpha\mathfrak{f} + \beta\mathfrak{g}$ как такой класс эквивалентности, к которому принадлежит вектор $\alpha f + \beta g$, где вектор $f = (f_0, f_1, \ldots)$ принадлежит к $\mathfrak{f}$, а вектор $g = (g_0, g_1, \ldots)$ принадлежит к $\mathfrak{g}$. Результат не зависит от выбора представителей f и g, поскольку набор векторов нулевой длины образует векторное пространство. Очевидно, что набор последовательностей с нулевой нормой в векторном пространстве H/H_0 классов эквивалентности играет роль нуля, и из $\|\mathfrak{f}\| = 0$ следует, что $\mathfrak{f} = 0$. В пространстве H/H_0 можно определить скалярное произведение, положив $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = (f, g)$. Это определение в силу (3-53) не зависит от выбора представителя $f \in \mathfrak{f}$.

Далее следует убедиться, действительно ли операторы $U(a, \Lambda)$ и $\varphi(h)$, определенные формулами (3-49) и (3-50), являются отображениями классов эквивалентности. Для оператора $U(a, \Lambda)$ это утверждение немедленно следует из того факта, что он оставляет инвариантным скалярное произведение. Именно, если f и g — две последовательности основных функций, для которых

$$\|f - g\| = 0,$$

то

$$\|U(a, \Lambda) f - U(a, \Lambda) g\| = \|U(a, \Lambda)(f - g)\| = \|f - g\| = 0,$$

т. е. если f и g принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности, то к нему же принадлежат $U(a, \Lambda) f$ и

$U(a, \Lambda)g$. То, что $\|f\| = 0$ приводит к $\|\varphi(h)f\| = 0$, следует из (3-52) и неравенства Шварца (3-53)

$$(\varphi(h)f, \varphi(h)f) = (f, \varphi(\bar{h})\varphi(h)f) \leqslant$$
$$\leqslant \|f\| \, \|\varphi(\bar{h})\varphi(h)f\| = 0, \quad \text{если} \quad \|f\| = 0.$$

Для краткости мы будем пользоваться для обозначения операторов, действующих на классах эквивалентности (т. е. операторов в пространстве H/H_0), теми же символами $U(a, \Lambda)$, $\varphi(h)$, которые ранее использовались для первоначальных операторов в H. Аналогично вектор состояния $\Psi_0 \in H/H_0$ будет обозначать класс эквивалентности элемента $(1, 0, 0, \ldots)$.

Далее нам придется разобраться с проблемой неполноты пространства классов эквивалентности H/H_0. Это — стандартная проблема, аналогичная проблеме пополнения совокупности рациональных чисел до совокупности вещественных чисел. Рассмотрим пространство $\mathfrak{h}$ всех последовательностей Коши $F = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots)$ элементов $\mathfrak{f}_j \in H/H_0$, т. е. последовательностей, для которых

$$\|\mathfrak{f}_m - \mathfrak{f}_n\| \to 0,$$

если m и n стремятся к бесконечности. Пространство $\mathfrak{h}$ — это векторное пространство, в котором сложение определено по формуле

$$\alpha \{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots\} + \beta \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots\} = \{\alpha\mathfrak{f}_1 + \beta\mathfrak{g}_1, \alpha\mathfrak{f}_2 + \beta\mathfrak{g}_2, \ldots\}.$$

Скалярное произведение двух элементов $F = \{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots\}$ и $G = \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots\}$ определяется равенством

$$(F, G) = \lim_{n \to \infty} (\mathfrak{f}_n, \mathfrak{g}_n). \tag{3-54}$$

Существование этого предела немедленно следует из предположения о том, что F и G — это последовательности Коши. [*Доказательство*: Так как $\{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots\}$ — последовательность Коши, то норма $\|\mathfrak{f}_n\|$ должна быть ограничена. Следовательно,

$$|(\mathfrak{f}_n, \mathfrak{g}_n) - (\mathfrak{f}_m, \mathfrak{g}_m)| = |(\mathfrak{f}_n - \mathfrak{f}_m, \mathfrak{g}_n) + (\mathfrak{f}_m, \mathfrak{g}_n - \mathfrak{g}_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathfrak{g}_n\| \, \|\mathfrak{f}_n - \mathfrak{f}_m\| + \|\mathfrak{f}_m\| \, \|\mathfrak{g}_n - \mathfrak{g}_m\|,$$

что стремится к нулю для больших m и n. Отсюда следует сходимость (3-54).] Элементарные расчеты, которые мы оставляем читателю, показывают, что (F, G) обладает свойствами скалярного произведения. Однако, точно так же как и в пространстве H, в пространстве $\mathfrak{h}$ могут встретиться векторы с нулевой нормой. Они также образуют изотропное подпространство $\mathfrak{h}_0$. Поэтому опять нужно ввести классы эквивалентности векторов, причем два вектора будут называться эквивалентными, если они отличаются на вектор нулевой нормы. Пространство таких классов эквивалентности мы обозначим через $\mathscr{H} = \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$. Это — векторное пространство с положительно определенным скалярным произведением. Сверх того, оно полно. Последнее доказывается следующим образом. Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ — последовательность Коши элементов пространства $\mathscr{H}$. Это означает, что $\|\Phi_m - \Phi_n\|$ произвольно мала для всех достаточно больших m и n. Следовательно, любые представители классов эквивалентности $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, скажем, соответственно $F_1, F_2, \ldots$, где $F_j \in \mathfrak{h}$, удовлетворяют условию

$$\|F_n - F_m\| = \|\Phi_n - \Phi_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Если $F_j = \{\mathfrak{f}_1^{(j)}, \mathfrak{f}_2^{(j)}, \ldots\}$, то, по определению,

$$\|F_n - F_m\| = \lim_{k\to\infty} \|\mathfrak{f}_k^{(n)} - \mathfrak{f}_k^{(m)}\|.$$

Можно предположить, что представляющие последовательности F_n выбраны так, что $\|\mathfrak{f}_k^{(n)} - \mathfrak{f}_k^{(m)}\| < 2\|\Phi_n - \Phi_m\|$ и $\|\mathfrak{f}_i^{(k)} - \mathfrak{f}_j^{(k)}\| < \frac{1}{k}$ для всех i, j, k и всех m и n. Этого можно всегда добиться, опустив достаточное число $\mathfrak{f}_k^{(n)}$ в начале последовательности F_n. Покажем теперь, что последовательность $G = \{\mathfrak{f}_1^{(1)}, \mathfrak{f}_2^{(2)}, \ldots\}$ является последовательностью Коши такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n - G\| = 0.$$

Тогда класс эквивалентности G, который мы обозначим через Φ, будет элементом пространства $\mathscr{H}$ таким, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_n - \Phi\| = 0$, чем и доказывается полнота простран-

ства $\mathscr{H}$. Еще несколько строчек — и мы докажем наши утверждения. Прежде всего имеем:

$$\|\mathfrak{f}_k{}^{(k)} - \mathfrak{f}_l{}^{(l)}\| \leqslant \|\mathfrak{f}_k{}^{(k)} - \mathfrak{f}_l{}^{(k)}\| + \|\mathfrak{f}_l{}^{(k)} - \mathfrak{f}_l{}^{(l)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathfrak{f}_k{}^{(k)} - \mathfrak{f}_l{}^{(k)}\| + 2\,\|\Phi_k - \Phi_l\| \to 0 \quad \text{при} \quad k,\ l \to \infty.$$

Это доказывает, что $\{\mathfrak{f}_k{}^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность Коши. Далее

$$\|F_n - G\| = \lim_{k\to\infty} \|\mathfrak{f}_k^{(n)} - \mathfrak{f}_k^{(k)}\|,$$

и каждый член в правой части меньше величины $2\|\Phi_n - \Phi_k\|$, которая стремится к нулю при n, $k \to \infty$. Следовательно, $\|F_n - G\| \to 0$.

Тем самым завершено построение нашего гильбертова пространства состояний. Когда теория задана в терминах ее вакуумных средних, вектор состояния $\Psi \in \mathscr{H} = \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ представляет собой класс эквивалентности (по модулю класса эквивалентности $\mathfrak{h}_0$ элементов $\{0, 0, \ldots\}$) последовательностей Коши классов эквивалентности H/H_0 (по модулю класса эквивалентности H_0 последовательностей с нулевой нормой) последовательностей основных функций. Да и впрямь, до чего же это просто!

Элементы пространства H/H_0 можно представить себе вложенными в пространство $\mathscr{H}$. Для каждого элемента $\mathfrak{f}$ из пространства H/H_0 имеется вектор $\Psi_\mathfrak{f}$ в пространстве $\mathscr{H}$, определенный как класс эквивалентности последовательности Коши $F = \{\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \ldots\} \in \mathfrak{h}$. Очевидно, что скалярное произведение $(\Psi_\mathfrak{f}, \Psi_\mathfrak{g})$ в пространстве $\mathscr{H}$ равно $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$ — скалярному произведению в пространстве H/H_0. Векторы $\Psi_\mathfrak{f}$ составляют подмножество D_1 в пространстве $\mathscr{H}$, плотное в $\mathscr{H}$. Действительно, если Φ — элемент пространства $\mathscr{H}$ и $\{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots\}$ — представляющая последовательность Коши, принадлежащая к Φ, то из $\|\mathfrak{f}_n - \mathfrak{f}_m\| < \varepsilon$ для всех m, $n > N$ следует, что $\|\Phi - \Psi_{\mathfrak{f}n}\| = \lim\limits_{m\to\infty} \|\mathfrak{f}_m - \mathfrak{f}_n\| \leqslant \varepsilon$.

Мы можем воспользоваться тем, что набор векторов $\Psi_\mathfrak{f}$ плотен в $\mathscr{H}$, чтобы показать, что пространство $\mathscr{H}$ сепарабельно. Необходимый счетный плотный набор векторов получим, выбирая последовательности $\{f_0, f_1, \ldots\} \in H$, где f_j — основные функции, взятые из счетного набора, плотного в пространстве $\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$, описанного в разделе 2-1. Чита-

тели могут сами убедиться в том, что выбранный так набор векторов $\Psi_\mathfrak{f}$ плотен в пространстве $\mathcal{H}$.

До сих пор оператор $U(a, \Lambda)$ был определен только в пространстве H/H_0. Но теперь мы имеем прямой способ определить его на плотном наборе векторов $\Psi_\mathfrak{f}$ в пространстве $\mathcal{H}$. Поскольку он непрерывен в этом пространстве, так как

$$\| U(a, \Lambda)\Psi_\mathfrak{f} - U(a, \Lambda)\Psi_\mathfrak{g} \| = \| \Psi_\mathfrak{f} - \Psi_\mathfrak{g} \|,$$

то он может быть продолжен по непрерывности на все пространство $\mathcal{H}$. Продолженный таким образом оператор, по определению, будет сохранять скалярное произведение: если $\Psi_{\mathfrak{f}n} \to \Phi$ и $\Psi_{\mathfrak{g}n} \to \chi$, то, по определению, $U(a, \Lambda)\Psi_{\mathfrak{f}n} \to$ $\to U(a, \Lambda)\Phi$ и $U(a, \Lambda)\Psi_{\mathfrak{g}n} \to U(a, \Lambda)\chi$, так что

$$(U(a, \Lambda)\Phi, U(a, \Lambda)\chi) = \lim_{n, m \to \infty} (U(a, \Lambda)\Psi_{\mathfrak{f}_n}, U(a, \Lambda)\Psi_{\mathfrak{g}_m}) = (\Phi, \chi).$$

Кроме того, оператор $U(a, \Lambda)$, определенный указанным способом в $\mathcal{H}$, непрерывен относительно $\{a, \Lambda\}$. В силу $\| U(b, M)\Psi - U(a, \Lambda)\Psi \| = \| \Psi - U(\{b, M\}^{-1}\{a, \Lambda\})\Psi \|$ достаточно убедиться в его непрерывности на тождественном элементе $\{0, 1\}$. На векторах вида $\Psi_\mathfrak{f}$ эта непрерывность легко проверяется

$$\| \Psi_\mathfrak{f} - U(a, \Lambda)\Psi_\mathfrak{f} \| = \| \mathfrak{f} - U(a, \Lambda)\mathfrak{f} \|. \qquad (3\text{-}55)$$

Так как правая часть этого равенства может быть выражена через обобщенные функции $\mathcal{W}$, проинтегрированные с основными функциями f_k и $\{a, \Lambda\} f_l$, а функция $\{a, \Lambda\} f_l$ зависит непрерывно от $\{a, \Lambda\}$ в топологии пространства $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4l})$, то оказывается, что (3-55) непрерывно относительно $\{a, \Lambda\}$. Тогда непрерывность оператора $U(a, \Lambda)$ на произвольном векторе $\Psi \in \mathcal{H}$ следует из его унитарности. Именно, очевидно, что

$$\| \Psi - U(a, \Lambda)\Psi \| = \| (\Psi - \Psi_\mathfrak{f}) + (\Psi_\mathfrak{f} - U(a, \Lambda)\Psi_\mathfrak{f}) +$$
$$+ U(a, \Lambda)(\Psi_\mathfrak{f} - \Psi) \| \geqslant 2\| \Psi - \Psi_\mathfrak{f} \| + \| \Psi_\mathfrak{f} - U(a, \Lambda)\Psi_\mathfrak{f} \| \to 0,$$

если

$$(a, \Lambda) \to (0, 1) \text{ и } \Psi_\mathfrak{f} \to \Psi.$$

Оператор $U(a, \Lambda)$ обладает инвариантным вектором, который, произведя заключительное изменение в обозначе-

ниях, мы вновь обозначим через Ψ_0. Он представляет собой класс эквивалентности последовательности Коши $\{\mathfrak{f}, \mathfrak{f}, \ldots\}$ из пространства $\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{f} \in H/H_0$ представляет собой класс эквивалентности последовательности основных функций $(1, 0, 0, \ldots)$. Покажем теперь, что в силу свойства разложения на пучки не существует никакого другого состояния Ψ'_0, линейно независимого от Ψ_0 и инвариантного относительно $U(a, \Lambda)$. Не теряя общности, можно предположить, что (Ψ'_0, Ψ_0) и $(\Psi'_0, \Psi'_0) = 1$. Если бы получилось так, что вектор Ψ'_0 имел бы вид $\Psi_\mathfrak{f} \in D_1$, то мы пришли бы к немедленному противоречию, поскольку для пространственноподобного вектора a

$$(\Psi'_0, \Psi'_0) = \lim_{\lambda\to\infty} (\Psi'_0, U(\lambda a, 1)\Psi'_0) = (\Psi'_0, \Psi_0)(\Psi_0, \Psi'_0) = 0,$$

где второе равенство следует из свойства разложения на пучки для вакуумных средних

$$\begin{aligned}
&(\Psi_\mathfrak{f}, U(\lambda a, 1)\Psi_\mathfrak{f}) = \\
&\qquad = ((f_0, f_1, \ldots), (f_0, \{\lambda a, 1\} f_1, \{\lambda a, 1\} f_2, \ldots)) = \\
&\qquad = \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_j\, dy_1 \cdots dy_k \bar{f}_j(x_1, \ldots, x_j) \times \\
&\times \mathscr{W}^{(j+k)}(x_j, \ldots, x_1, y_1 + \lambda a, \ldots, y_k + \lambda a) f_k(y_1, \ldots, y_k) \to \\
&\quad \to \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \ldots dx_j\, dy_1 \ldots dy_k \bar{f}_j(x_1, \ldots, x_j) \times \\
&\qquad \times \mathscr{W}^{(j)}(x_j, \ldots, x_1) \mathscr{W}^{(k)}(y_1, \ldots, y_k) f_k(y_1, \ldots, y_k) = \\
&\qquad\qquad = (\Psi_\mathfrak{f}, \Psi_0)(\Psi_0, \Psi_\mathfrak{f}).
\end{aligned}$$

Вообще говоря, вектор Ψ'_0 не имеет вида $\Psi_\mathfrak{f}$, но поскольку набор $\Psi_\mathfrak{f}$ плотен, Ψ'_0 может быть аппроксимирован векторами из $\Psi_\mathfrak{f}$ с любой точностью. Предположим, что $\|\Psi'_0 - \Psi_\mathfrak{f}\| < \varepsilon$, где не ограничивая общности, можно положить $\|\Psi_\mathfrak{f}\| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&(\Psi'_0, \Psi'_0) = \lim_{\lambda\to\infty} (\Psi'_0, U(\lambda a, 1)\Psi'_0) = \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} [(\Psi'_0 - \Psi_\mathfrak{f}, U(\lambda a, 1)\Psi'_0) + (\Psi_\mathfrak{f}, U(\lambda a, 1)(\Psi'_0 - \Psi_\mathfrak{f})) + \\
&\qquad\qquad + (\Psi_\mathfrak{f}, U(\lambda a, 1)\Psi_\mathfrak{f})],
\end{aligned}$$

и, следовательно, в силу теоремы о разложении на пучки

$$|(\Psi_0', \Psi_0') - (\Psi_\mathfrak{f}, \Psi_0)(\Psi_0, \Psi_\mathfrak{f})| \leqslant 2\varepsilon.$$

Однако

$$|(\Psi_\mathfrak{f}, \Psi_0)| = |(\Psi_\mathfrak{f} - \Psi_0', \Psi_0)| \leqslant \|\Psi_\mathfrak{f} - \Psi_0'\| < \varepsilon,$$

и поэтому

$$(\Psi_0', \Psi_0') \leqslant (\Psi_\mathfrak{f}, \Psi_0)(\Psi_0, \Psi_\mathfrak{f}) + |(\Psi_0', \Psi_0') - \\ - (\Psi_\mathfrak{f}, \Psi_0)(\Psi_0, \Psi_\mathfrak{f})| \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon^2,$$

что противоречиво для достаточно малых ε. Тем самым вакуумное состояние единственно.

Осталось проверить только одно свойство оператора $U(a, \Lambda)$, именно, что его спектр энергии-импульса лежит или внутри, или на поверхности будущего светового конуса. Это — прямое следствие (3-44).

Размазанное поле $\varphi(h)$ было определено на всех векторах $\mathfrak{g}$ в пространстве H/H_0. Отсюда немедленно следует, что оно определено на подобласти D_1 векторов $\Psi_\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathscr{H}$. Определим результат действия $\varphi(h)\Psi_\mathfrak{g}$ как $\Psi_{\otimes h\,\mathfrak{g}}$, где $h \otimes \mathfrak{g}$ — класс эквивалентности последовательности

$$(0, hg_0, h \otimes g_1, h \otimes g_2, \ldots), \tag{3-56}$$

причем последовательность $(g_0, g_1, \ldots)$ входит в класс эквивалентности $\mathfrak{g}$. В силу этого определения

$$\varphi(h)[\alpha\Psi_\mathfrak{g} + \beta\Psi_\mathfrak{f}] = \Psi_{\alpha h \otimes \mathfrak{g} + \beta h \otimes \mathfrak{f}}.$$

В частности, это определяет $\varphi(h)$ на D_0, т. е. на наборе векторов вида $\mathscr{P}[\varphi(h)]\Psi_0$. Далее

$$\int \ldots \int f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \mathscr{W}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \\ = (\Psi_0, \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n)\Psi_0).$$

Область D_1 подходит в качестве области определения поля, поскольку она явно удовлетворяет требованиям $\varphi(h)D_1 \subset \subset D_1$, $\Psi_0 \in D_1$, $U(a, \Lambda)D_1 \subset D_1$. Так как функция $(\Psi_\mathfrak{g}, \varphi(h)\Psi_\mathfrak{f})$ представляет собой конечную линейную комбинацию функций $\mathscr{W}$, то она является обобщенной функцией умеренного роста с основной функцией h. Тем самым про-

верка аксиом 0 и I завершена. Трансформационные свойства II немедленно следуют из (3-42). Соотношение эрмитовости $\varphi(h)\Psi = [\varphi(\bar{h})]^*\Psi$ может быть доказано для всех векторов Ψ из D_1. Поскольку φ и φ^* — линейные операторы, достаточно проверить это соотношение для векторов вида

$$\Psi_g = \int g(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\,dx_1\ldots dx_n\Psi_0.$$

Из (3-56) непосредственно следует, что

$$\|\varphi(h)\Psi_g - [\varphi(\bar{h})]^*\Psi_g\| = 0,$$

если воспользоваться определением нормы через функции $\mathscr{W}$, которое дается равенством $\|\Psi_g\|^2 = (\Psi_g, \Psi_g)$. Аналогично, используя (3-56), можно проверить условие локальной коммутативности для векторов из D_1.

Явное построение эрмитова скалярного поля тем самым завершено. Остается показать, что любое другое поле с теми же вакуумными средними унитарно эквивалентно полю, сконструированному выше.

Предположим, что $\mathscr{H}_1$, $U_1(a, \Lambda)$ и $\varphi_1(x)$ определяют теорию с вакуумом Ψ_{01} и теми же вакуумными средними. Пусть V — отображение, переводящее вектор $\Psi_{\mathfrak{f}} \in \mathscr{H}$ в вектор пространства $\mathscr{H}_1$, который определен условием

$$V\Psi_{\mathfrak{f}} = \Psi_{1\mathfrak{f}} = f_0\Psi_{01} + \varphi_1(f_1)\Psi_{01} +$$

$$+ \int \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)f_2(x_1, x_2)\,dx_1,\ dx_2\,\Psi_{01} + \ldots, \qquad (3\text{-}57)$$

где $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\} = f$ принадлежит классу эквивалентности $\mathfrak{f}$. Отображение V хорошо определено, поскольку (3-57), очевидно, не зависит от того, какой именно выбран представитель. Отображение V унитарно, поскольку

$$(V\Psi_{\mathfrak{f}}, V\Psi_{\mathfrak{g}}) = (\Psi_{1\mathfrak{f}}, \Psi_{1\mathfrak{g}})$$

следует из равенства средних в двух теориях. Это утверждение в силу непрерывности можно продолжить на полные $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_1$ [мы предполагаем, что векторы вида (3-57) плотны в $\mathscr{H}_1$]. Если $\Psi_{\mathfrak{f}} \in D_1$, то

$$V\varphi(h)\Psi_{\mathfrak{f}} = V\Psi_{h\otimes\mathfrak{f}},$$

где $\Psi_{h\otimes\mathfrak{f}}$ определен формулой (3-57), и, продолжая

равенство,

$$=\varphi_1(hf_0)\Psi_{01}+\int h(x_1)f_1(x_2)\varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\,dx_1\,dx_2\,\Psi_{01}+\ldots=$$
$$=\varphi_1(h)[f_0\Psi_{01}+\int f(x_1)\varphi(x_1)\,dx_1\,\Psi_{01}+\ldots]=\varphi_1(h)\,V\Psi_f\,.$$

Следовательно, $V\varphi(h)V^{-1}=\varphi_1(h)$ выполняется для всех векторов в $D_{11}\subset\mathscr{H}_1$. Наконец, несложное прямое вычисление показывает, что $U_1(a,\Lambda)=VU(a,\Lambda)V^{-1}$.∎

Еще раз отметим, что эта реконструкция может быть выполнена для счетного набора полей любого спина, разумеется, если задано достаточное число $\mathscr{W}$ с должными свойствами. Мы предоставляем читателю провести это построение для случаев свободного поля и обобщенного свободного поля, исходя из вакуумных средних, приведенных в разделе 3-3. Подобная реконструкция не приведет (если исходить только из перечисленных выше свойств) к теории, удовлетворяющей аксиоме асимптотической полноты. Однако если спектр энергии-импульса в рассматриваемой теории содержит при $p^2=m^2$ изолированное представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, то теория Хаага — Рюэля гарантирует интерпретацию в терминах частиц по крайней мере для состояний рассеяния. Мы завершим эту главу обсуждением некоторых других симметрий, которые могут встретиться в теории.

3-5. СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Теперь мы вернемся к вопросу, поднятому в конце раздела 1-2, именно, если некий унитарный оператор в $\mathscr{H}$ следует интерпретировать как симметрию, то он должен иметь разумный физический смысл. Прежде всего покажем, что, приписав всем полям в теории поля определенные трансформационные свойства, мы фиксируем соответствующий закон преобразования состояний единственным образом с точностью до фазового множителя.

Для простоты эту теорему мы докажем только для эрмитова скалярного поля, которое обычным образом преобразуется под действием оператора четности. Простое изменение обозначений устанавливает аналогичные результаты в общей теории поля для операторов P, C и T, заданных (1-52).

Теорема 3-8

Пусть дана теория эрмитова скалярного поля φ с областью определения D. Предположим, что $U(I_s)$ — унитарный оператор, который удовлетворяет условиям:

$$U(I_s)D = D,$$
$$U(I_s)\varphi(x)U(I_s)^{-1} = \varphi(x_0, -\mathbf{x}) \equiv \varphi(I_s x). \tag{3-58}$$

Тогда оператор $U(I_s)$ определен с точностью до фазового множителя, и $U\Psi_0 = e^{i\alpha}\Psi_0$. Далее

$$U(I_s)U(a, \Lambda)U(I_s)^{-1} = U(I_s a, I_s^{-1}\Lambda I_s), \tag{3-59}$$

где $U(a, \Lambda)$ — представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$.

Доказательство

Выберем Ψ, $\Phi \in D$ и рассмотрим выражение

$$(\Psi, \varphi(x)U(I_s)U(a, \Lambda)U(I_s)^{-1}U(I_s a, I_s^{-1}\Lambda I_s)^{-1}\Phi).$$

Используя (3-58) и (3-4) и перемещая оператор φ направо, преобразуем это выражение к виду

$$(\Psi, U(I_s)U(a, \Lambda)U(I_s)^{-1}U(I_s a, I_s^{-1}\Lambda I_s)^{-1}\varphi(x)\Phi).$$

Так как с учетом теоремы 4-5 можно предположить, что поле φ неприводимо, то

$$U(I_s)U(a, \Lambda)U(I_s)^{-1}U(I_s a, I_s^{-1}\Lambda I_s)^{-1} = \omega 1, \tag{3-60}$$

где $|\omega| = 1$. Подействовав обеими частями равенства (3-60) на вакуум и имея в виду $U(a, \Lambda)\Psi_0 = \Psi_0$, получим, что

$$U(I_s a, I_s^{-1}\Lambda I_s)U(I_s)\Psi_0 = \omega^{-1}U(I_s)\Psi_0 \tag{3-61}$$

для всех a, Λ. Поскольку вакуум Ψ_0 — единственное состояние, инвариантное относительно всех $U(a, \Lambda)$, то

$$U(I_s)\Psi_0 = e^{i\alpha}\Psi_0.$$

Подставляя последнее в (3-61), получим, что $\omega = 1$, что и доказывает (3-59).

Наконец, чтобы показать, что оператор $U(I_s)$ определен с точностью до фазы, предположим, что $U(I_s)\Psi_0 = \Psi_0$. Тогда для состояний вида $\Psi = \varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\Psi_0$ получим:

$$U(I_s)\Psi = U\varphi(f_1)U^{-1}\,U\varphi(f_2)U^{-1}\ldots U\varphi(f_n)U^{-1}\,U\Psi_0 = \\ = \varphi(\hat{f}_1)\ldots\varphi(\hat{f}_n)\Psi_0 \in D,$$

где $\hat{f}_i(x) = f_i(I_s x)$. Тем самым оператор $U(I_s)$ в силу линейности и непрерывности может быть продолжен единственным образом на все пространство $\mathscr{H}$ и, будучи продолжен, по-прежнему будет удовлетворять (3-59).

Так же точно условия (1-52) для операторов $U(C)$ и $U(I_t)$ приводят к свойствам $U(C)\Psi_0 = e^{i\alpha_c}\Psi_0$, $U(I_t)\Psi_0 = e^{i\alpha_t}\Psi_0$ и к «групповым» свойствам

$$U(I_t)U(a,\Lambda)U(I_t)^{-1} = U(I_t a, I_t^{-1}\Lambda I_t), \qquad (3\text{-}62)$$

$$U(C)U(a,\Lambda)U(C)^{-1} = U(a,\Lambda). \qquad (3\text{-}63)$$

Соотношения (3-59), (3-62) и (3-63) и инвариантность вакуума Ψ_0 — все эти требования необходимо наложить на операторы $U(I_s)$, $U(I_t)$ и $U(C)$, чтобы их можно было бы интерпретировать соответственно как P, T и C.

Обычно произвольный фазовый множитель в определении операторов $U(I_s)$, $U(I_t)$ или $U(C)$ выбирают так, чтобы

$$U(I_s)\Psi_0 = \Psi_0, \quad U(I_t)\Psi_0 = \Psi_0, \quad U(C)\Psi_0 = \Psi_0. \qquad (3\text{-}64)$$

В таком случае утверждения теоремы 3-8 можно свести к следующему: *требование того, чтобы поля в теории поля имели определенные трансформационные свойства относительно $U(I_s)$, $U(I_t)$ или $U(C)$, однозначно фиксирует эти операторы.*

Таким образом, в теории поля проблема установления того, является ли данная симметрия надлежащим выражением операции P, T или C, сводится к проблеме понимания физического содержания трансформационных свойств полей относительно этих операций. Это — в достаточной мере сложная задача, все разветвления которой мы не сумеем здесь полностью исследовать. Ограничимся рядом замечаний.

Для наблюдаемого поля его трансформационные свойства относительно преобразований P, C или T — это непосредственное утверждение о наблюдаемых величинах, и здесь не остается никакой почвы для двусмысленности. Например, в теории нейтральных π-мезонов закон преобразования $\varphi(x) \to -\varphi(I_s x)$, отвечающий псевдоскалярным π^0-мезонам, физически отличен от $\varphi(x) \to -\varphi(I_s x)$, который описывал бы скалярные π^0-мезоны. С другой стороны, для ненаблюдаемых полей физические следствия предположения о данном законе преобразования устанавливаются только косвенным путем; и, вообще говоря, для решения вопроса о том, действительно ли предположение о различных законах преобразования приводит к физически различным теориям, неизбежно приходится анализировать правила суперотбора теории. Например, выбор фазы в определениях (1-45) преобразований P, C и T для одного поля ψ спина $^1/_2$ довольно произволен, так же как и для обобщений на поля высших спинов. Выбор $\psi(x) \to \to \gamma^0\psi(I_s x)$ так же хорош в качестве определения операции четности, как и выбор $\psi(x) \to -\gamma^0\psi(I_s, x)$. Если $U(I_s)$ — преобразование, приводящее к первому варианту, то $RU(I_s)$ будет приводить ко второму варианту, если R — оператор поворота на угол 2π вокруг некоторой оси, т. е. R равен 1 на состояниях с целым спином и равен -1 на состояниях с полуцелым спином. Вообще два различных выбора U и U' некоторого оператора симметрии физически тождественны, если существует такой оператор V, что $U = VU'$ и $|(V\Psi, \Phi)|^2 = |(\Psi, \Phi)|^2$ для всех физически реализуемых состояний Φ и Ψ.

Простой пример, в котором выбор фазы в законе преобразования под действием $U(I_s)$ в самом деле имеет физические последствия,— это случай двух антикоммутирующих полей ψ_1 и ψ_2 спина $^1/_2$. Предположим, что под действием операции инверсии пространства эти поля преобразуются по законам $\psi_1(x) \to \varepsilon_1\gamma^0\psi_1(I_s x)$, $\psi_2(x) \to \to \varepsilon_2\gamma^0\psi_2(I_s x)$. Описанное выше преобразование R можно использовать для того, чтобы получить новые поля ψ'_1 и ψ'_2, в которых множители $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ заменятся на $(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2)$, но теории с $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, i)$ физически различны. Например, величина $\psi_1{}^+(x)\psi_2(y) + \psi_2{}^+(y)\psi_1(x)$ представляет собой возможный пример наблюдаемой в пер-

вых двух случаях, будучи скаляром в первом и псевдоскаляром во втором случае; однако в третьем случае она вообще не обладает определенным законом преобразования. Третий случай интересен тем, что в нем оператор $U(I_s)^2$ коммутирует с $\psi_2(x)$ и антикоммутирует с $\psi_1(x)$. Это означает, что существует правило суперотбора, отделяющее состояния вида $\mathcal{P}(\psi_1(f), \psi_2(g)\ldots)\Psi_0$, где $\mathcal{P}$ — полином по нечетным степеням ψ_1, на которые натянуто подпространство $\mathcal{H}_1$, от состояний в $\mathcal{H}_2$, которое натянуто на состояния того же вида, но где уже $\mathcal{P}$ — полином по четным степеням ψ_1. Чтобы понять это утверждение, вспомним, что физически реализуемое состояние $\boldsymbol{\Psi}$ не должно изменяться при двукратном применении оператора четности, так что если Ψ — вектор луча $\boldsymbol{\Psi}$, то и $U(I_s)^2\Psi$ — вектор того же луча. Далее оператор $U(I_s)^2$ принимает значение (-1) на подпространстве $\mathcal{H}_1$ и значение $(+1)$ на подпространстве $\mathcal{H}_2$. Поэтому состояние, представленное вектором вида $\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$ с $\alpha\beta \neq 0$, $\Psi_1 \in \mathcal{H}_1$ и $\Psi_2 \in \mathcal{H}_2$, не может быть физически реализуемым. Или более общее утверждение: если операторы $U(I_s)$, $U(C)$ или $U(I_t)$ должны интерпретироваться как операторы преобразований P, C или T, то каждый из операторов $[U(I_s)]^2$, $[U(I_t)]^2$, $[U(C)]^2$, $U(I_s)U(C) \times U(I_s)U(C)$ и т. д. должен быть константой, умноженной на единичный оператор, на каждом когерентном подпространстве. (Определение физически реализуемых состояний и когерентных подпространств см. в разделе 1-1.) На практике этот результат приводит к тому, что в случае некоторых выборов фаз в $U(I_s)$, $U(I_t)$ или $U(C)$ теории будут более общими в том смысле, что они не будут иметь правил сверхотбора, которым они обязаны подчиняться в силу их инвариантности относительно преобразований P, C или T. К такого рода специальному выбору относится выбор фаз, произведенный в разделе 1-3.

Обычный случай, в котором различные фазы в определении инверсий физически эквивалентны,— это случай теории, имеющей *мультипликативную симметрию*. Это значит, что существует такой унитарный оператор V, что для некоторого набора комплексных чисел, по модулю равных единице, имеет место равенство

$$V\psi_j(x)V^{-1} = \lambda_j\psi_j(x). \tag{3-65}$$

Пример мультипликативной симметрии дает описанный выше оператор R; в этом случае $\lambda_j = +1$ для полей с целым спином и $\lambda_j = -1$ для полей с полуцелым спином. С помощью доводов, в точности подобных использованным при доказательстве теоремы 3-8, заключаем, что оператор V коммутирует с $U(a, \Lambda)$ и оставляет вакуум инвариантным. Таким образом,

$$(\Psi_0, \psi_1(x_1) \ldots \Psi_0) = (V\Psi_0, V\psi_1(x_1) \ldots \Psi_0) = \\ = \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2} \ldots (\Psi_0, \psi_1(x_1) \ldots \Psi_0),$$

где k_j — число, отмечающее, сколько раз оператор ψ_j входит в вакуумное среднее. Очевидно, если $\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2} \ldots \neq 1$, то соответствующее вакуумное среднее равно нулю. Обращение в нуль таких вакуумных средних означает, что в теории существуют специальные правила отбора. В такой теории выбор в качестве оператора, представляющего инверсию пространства, оператора $U(I_s)$ может быть физически эквивалентен выбору оператора $VU(I_s)$.

Существует еще одна сторона вопроса о законе преобразования полей относительно симметрий, которая существенна для полноты физической интерпретации; это — связь с теорией рассеяния. Непосредственное применение теории Хаага — Рюэля показывает, что трансформационные свойства полей относительно P, C или T определяют соответствующие трансформационные свойства ин- и аут-полей. Например, если в теории существует скалярная частица, то соответствующие асимптотические поля удовлетворяют соотношениям

$$U(I_s)\varphi^{\text{in}}(x)U(I_s)^{-1} = \varphi^{\text{in}}(I_s x),$$
$$U(C)\varphi^{\text{in}}(x)U(C)^{-1} = \varphi^{\text{in}*}(x),$$
$$U(I_t)\varphi^{\text{in}}(x)U(I_t)^{-1} = \varphi^{\text{out}}(I_t x)$$

и таким же соотношениям с заменой φ^{in} на φ^{out}. Если в теории есть частица с более высоким спином, то ее ковариантные свойства определяются ковариантными свойствами одночлена по основным полям теории, который имеет отличный от нуля матричный элемент между вакуумом и состоянием, содержащим одну такую частицу. Оператор $U(I_s)$ в (1-45) выбран так, что он обращает все знаки импульсов частиц в ин-состояниях. Тот же оператор анало-

гичным образом воздействует на импульсы частиц в аут-состояниях, как это и должно быть для оператора четности из физических соображений [т. е. он не зависит от времени; ср. замечание после (1-3)]. Таким же образом оператор $U(C)$ переводит частицы в соответствующие античастицы. Отсюда следует, что если операторы $U(I_s)$, $U(C)$ определяют симметрии, то они коммутируют с оператором S, приводя к *закону сохранения*: если состояние Ψ^{in} — собственное состояние оператора $U(I_s)$, то и состояние $\Psi^{\text{out}} = S\Psi^{\text{in}}$ — собственное состояние этого оператора с тем же собственным значением. Требование инвариантности относительно I_t более сложно, так как оператор $U(I_t)$ переводит каждое ин-состояние в аут-состояние с изменением знаков всех импульсов и спинов. Оно приводит к условию вещественности элементов S-матрицы.

Распространим теперь доказательство теоремы реконструкции (теоремы 3-7) на теории с дискретными симметриями, которые приводят к соотношениям типа (3-38) и (3-39). Построение соответствующих операторов $U(C)$ или Θ происходит таким же образом, как и построение оператора $U(a, \Lambda)$ в теореме 3-7. Ограничимся обсуждением оператора преобразования PCT. Если нам даны дополнительные тождества между функциями $\mathscr{W}$ для P, C и T по отдельности, подобные тождеству (3-38) для C, то тем же способом можно доказать существование соответствующего оператора.

Теорема 3-9

Рассмотрим теорию поля с полями $\varphi_{(\alpha)(\dot{\beta})} \ldots$ $\ldots \psi_{(\mu)(\dot{\nu})}$, где $(\alpha), \ldots, (\mu)$ — совокупности индексов без точек, а $(\dot{\beta}), \ldots, (\dot{\nu})$ — совокупность индексов с точками. Предположим, что (3-39) справедливо для всех вакуумных средних таких полей, т. е.

$$(\Psi_0, \varphi_{(\alpha)(\dot{\beta})}(x_1) \ldots \psi_{(\mu)(\dot{\nu})}(x_n) \Psi_0) =$$
$$= i^F (-1)^J \overline{(\Psi_0, \varphi_{(\overset{*}{\alpha})(\dot{\beta})}(-x_1) \ldots \psi_{(\overset{*}{\mu})(\dot{\nu})}(-x_n) \Psi_0)}, \tag{3-66}$$

где F — число полей с полуцелым спином, а J — полное число индексов без точек в совокупностях $(\alpha), \ldots, (\nu)$. Тогда существует единственный (с точностью до множителя) антиунитарный оператор Θ в $\mathscr{H}$ такой, что для любого поля в теории

$$\Theta^{-1} \varphi_{(\alpha)(\dot{\beta})}(f) \Theta = (-1)^{j} i^{F(\varphi)} \varphi^{*}_{(\alpha)(\dot{\beta})}(\hat{f}), \qquad (3\text{-}67)$$

где

$$\hat{f}(x) = \bar{f}(-x), \qquad (\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j),$$
$$(\dot{\beta}) = (\dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_k)$$

и

$$F^{(\varphi)} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j+k \text{ — четное}, \\ 1, & \text{если} \quad j+k \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Доказательство

Можно определить

$$\Theta\varphi_{(\alpha)(\dot{\beta})}(f_1) \ldots \psi_{(\mu)(\dot{\nu})}(f_n)\Psi_0 =$$
$$= \Theta\varphi_{(\alpha)(\dot{\beta})}(f_1)\Theta^{-1}\Theta \ldots \Theta\psi_{(\mu)(\dot{\nu})}(f_n)\Theta^{-1}\Theta\Psi_0 =$$
$$= (-i)^{F}(-1)^{J} \varphi^{*}_{(\alpha)(\dot{\beta})}(\hat{f}_1) \ldots \psi^{*}_{(\mu)(\dot{\nu})}(\hat{f}_n)\Psi_0 \in H.$$

Это соотношение может быть продолжено в силу антилинейности на все пространство H (определенное в разделе 3-4). Определенный таким образом оператор Θ антиунитарен, поскольку (3-66) приводит к

$$(\Theta f, \Theta g) = \overline{(f, g)}$$

для всех конечных последовательностей $f = (f_0, f_1, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, \ldots)$ основных функций. Фактически оператор Θ определяет отображение факторпространства H/H_0, полученного путем идентификации векторов, разность которых имеет нулевую норму в пространстве H (см. раздел 3-4). В самом деле, предположим, что $f \sim g$ в том смысле, что $\|f - g\| = 0$. Это означает, что некоторая сумма вакуумных средних, размазанная с основными функциями f и основными функциями g, обращается в нуль. Эти вакуумные средние можно заменить, используя (3-66), на вакуумные

средние, преобразованные действием PCT. Тогда полученное соотношение приведет к утверждению, что $\|\Theta f - \Theta g\| = 0$, т. е. $\Theta f \sim \Theta g$. Следовательно, Θ определяет антиунитарный оператор в пространстве H / H_0, которое может рассматриваться как подпространство $\mathscr{H}$. Продолжение на все $\mathscr{H}$ можно провести по непрерывности, и определенное таким образом продолжение будет антиунитарно. ∎

Теорема 3-9 показывает, что существование в теории поля PCT симметрии эквивалентно справедливости тождеств (3-66). В следующей главе показано, что тождества (3-66) имеют место в любой локальной теории поля. Очевидно, что это очень важный результат.

Библиография

Аксиомы, приведенные в разделе 3-1, принадлежат Гордингу и Вайтману:

1. A. S. Wightman, Les Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs, pp. 11—19. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959. [Есть русский перевод в сб. Математика 6 : 4, 96 (1962)], а также
2. A. S. Wightman, L. Gärding, Fields as Operator-Valued Distributions in Quantum Field Theory, Ark. f. Fys. 28, 129 (1964).

Независимость различных аксиом в квантовой теории поля изучалась в работе

3. R. Haag, B. Schroer, The Postulates of Quantum Field Theory, J. Math. Phys. 3, 248 (1962).

Обобщенное свободное поле было введено Гринбергом; см., например,

4. O. W. Greenberg, Generalized Free Fields and Models of Local Field Theory, Ann. Phys. 16, 158 (1961).

В разделе 3-1 мы ссылались на фундаментальную работу Д. Рюэля по теории рассеяния:

5. D. Ruelle, On the Asymptotic Condition in Quantum Field Theory, Helv. Phys. Acta 35, 147 (1962).

В ней можно найти ссылки на более ранние работы Хаага и других, которые заложили основы этой формулировки теории рассеяния. В этой работе также было введено определение (3-8) неприводимости, которое использовано в этой книге.

Наше рассмотрение вакуумных средних следует работе

6. A. S. Wightman, Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values, Phys. Rev. 101, 860 (1956),

Важная связь между свойствами разложения на пучки и единственностью вакуумного состояния была обнаружена в работе

7. K. Hepp, R. Jost, D. Ruelle, O. Steinmann, Necessary Condition on Wightman Functions, Helv. Phys. Acta 34, 542 (1961); см. также
8. H. J. Borchers, On the Structure of the Algebra of Field Operators, Nuovo cimento 24, 214 (1962).

Сама теорема разложения на пучки известна во многих вариантах. В работе Рюэля (см. [5]) содержится, вероятно, наиболее точный вариант. Другие варианты приведены в следующих ниже работах, которые также содержат ссылки на более ранние статьи:

9. H. Araki, On the Asymptotic Behavior of Vacuum Expectation Values at Large Space-like Separations, Ann. Phys. 11, 260 (1960).
10. R. Jost, K. Hepp, Über die Matrixelemente des Translations Operators, Helv. Phys. Acta 35, 35 (1962).
11. H. Araki, K. Hepp, D. Ruelle, On the Asymptotic Behavior of Wightman Functions in Space-like Directions, Helv. Phys. Acta 35, 164 (1962).

Последняя статья содержит подробное обсуждение случая, когда не существует массовой щели.

В качестве обзора работы об областях голоморфности вакуумных средних можно рекомендовать:

12. A. O. G. Källén, Properties of Vacuum Expectation Values of Field Operators, pp. 389—447 в «Dispersion Relations and Elementary Particles», New York, 1960.
13. A. S. Wightman, Quantum Field Theory and Analytic Functions of Several Complex Variables, Proc. Indian Math. Soc. 24, 625 (1960).

Доказательство теоремы реконструкции, приведенное в разделе 3-4, скорее ближе не к оригинальной работе (см. [6]), а к варианту, изложенному в

14. W. Schmidt, K. Baumann, Quantentheorie der Felder als Distributionstheorie, Nuovo cimento 4, 860 (1956).

Общий обзор недавних достижений теории, включая теорию Хаага — Рюэля, можно найти в статье

15. A. S. Wightman, Recent Achievements of Axiomatic Field Theory, Proceedings of the Summer Seminar of IAEA, Trieste, 1962, опубликована в книге Theoretical Physics, IAEA, Vienna, 1963.

Наиболее систематическое обсуждение нелинейной программы принадлежит Симанзику и изложено в работе

16. K. Symanzik, Green's Functions and the Quantum Theory of Fields, Lectures in Theoretical Physics III Boulder, 1960, pp. 490—531, Interscience, New York, 1961.

Подробное изучение значения фаз в законах преобразования полей относительно инверсий см. в

17. G. Feinberg, S. Weinberg, On the Phase Factors in Inversions. Nuovo cimento 14, 571 (1959).

Глава 4

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

«He had bought a large map representing the sea,
Without the least vestige of land:
And the crew were much pleased when they found it to be
A map they could all understand».

Fit the Second, *The Hunting of the Snark* *).

Lewis Carroll.

В предыдущих главах мы определили, что понимается под релятивистской квантовой теорией поля, и изложили некоторые методы, которые могут пригодиться при анализе ее структуры. В данной главе с помощью этих методов устанавливается ряд общих свойств релятивистских квантовых теорий поля.

4-1. ОБЩАЯ ПРИРОДА ЛОКАЛЬНОЙ КОММУТАТИВНОСТИ

Локальная коммутативность утверждает, что коммутаторы или антикоммутаторы $[\varphi(x), \psi(y)]_{\pm}$ обращаются в нуль при всех пространственноподобных $x - y$. Предположение, которое кажется более слабым, состоит в том, что это требование должно выполняться в некоторой меньшей области, скажем при $(x-y)^2 < -a < 0$. Как будет видно из теоремы 4-1, такие внешне более слабые предположения фактически не являются более слабыми, поскольку требование локальной коммутативности может быть из них выведено.

---

*) «На карте лишь море, ни дюйма земли,
Но что за дело матросу?
Веселится команда — хоть прок не велик,
Но нет зато и вопросов».

Песнь вторая. *Охота на Снарка. Льюис Кэрролл*
(Перев. А. Д. Суханова)

Эта теорема будет доказана для одного эрмитова скалярного поля и соответственно для коммутатора. Доказательство ее для произвольного набора полей, подчиняющихся как перестановочным, так и антиперестановочным соотношениям, состоит просто в приписании нескольких индексов и в изменении некоторого числа знаков, — задача, которую мы оставляем читателю.

Теорема 4-1

Пусть φ — эрмитово скалярное поле, удовлетворяющее аксиомам I и II, но вместо аксиомы III оно подчиняется требованию

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = 0, \tag{4-1}$$

если x и y принадлежат к некоторым открытым множествам, разделенным пространственноподобными интервалами. Предположим, что вакуумное состояние циклично относительно φ. Тогда поле φ локально, т. е. (4-1) справедливо для всех x и y, разделенных пространственноподобными интервалами.

Замечания

1. В силу закона преобразования поля имеем:

$$U(a, \Lambda)[\varphi(x), \varphi(y)]_\pm U(a, \Lambda)^{-1} = [\varphi(\Lambda x + a), \varphi(\Lambda y + a)]_\pm.$$

Поэтому из исчезновения (4-1) в окрестности точки $\{x, y\}$ следует обращение его в нуль в окрестности точки $\{\Lambda x + a, \Lambda y + a\}$. Тем самым из условий теоремы немедленно вытекает обращение рассматриваемого коммутатора в нуль для всех $\{x, y\}$, для которых интервал $(x - y)^2$ входит в некоторое открытое множество на отрицательной вещественной оси.

2. Утверждение об обращении коммутатора в нуль означает, что этот оператор обращается в нуль на области определения D поля φ.

Доказательство

Рассмотрим две обобщенные функции F_1 и F_2, где F_1 определена равенством

$$F_1(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{j-1} - x_j, x_j - x, x - y, y - y_1, y_1 - y_2, \ldots, y_{k-1} - y_k) = \\ = (\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_j)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_k)\Psi_0), \quad (4\text{-}2)$$

а F_2 получается из F_1, если x и y поменять местами. Эти функции представляют собой граничные значения голоморфных функций $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ соответственно. Функция $\mathbf{F}_1$ голоморфна в расширенной трубе $\mathscr{T}'_{j+k+1}$ по переменным

$$x_1 - x_2 - i\eta_1, \ldots, x_{j-1} - x_j - i\eta_{j-1}, x_j - x - i\eta, \\ x - y - i\eta', \quad (4\text{-}3)$$

$$y - y_1 - i\eta'', y_1 - y_2 - i\rho_1, \ldots, y_{k-1} - y_k - i\rho_{k-1}.$$

Чтобы получить граничное значение F_1, необходимо переменные $\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \eta, \eta', \eta'', \rho_1, \ldots, \rho_{k-1}$ устремить к нулю в $\mathbf{V}_+$. То же самое справедливо для $\mathbf{F}_2$, если только во всех аргументах поменять местами x и y. Однако если мы хотим рассматривать $\mathbf{F}_2$ как функцию аргументов (4-3), то эти аргументы должны изменяться в переставленной расширенной трубе $\mathscr{P}\mathscr{T}'_{j+k+1}$, где $\mathscr{P}$ — преобразование, переводящее (4-3) в

$$x_1 - x_2 - i\eta_1, \ldots, x_{j-1} - x_j - i\eta_{j-1}, (x_j - x - i\eta) + \\ + (x - y - i\eta'),$$

$$-(x - y - i\eta'), (x - y - i\eta') + (y - y_1 - i\eta''), \\ y_1 - y_2 - i\rho_1, \ldots, y_{k-1} - y_k - i\rho_{k-1}. \quad (4\text{-}4)$$

Именно этот второй способ рассмотрения $\mathbf{F}_2$ важен в последующем.

Напомним, что в силу обсуждения, проведенного в конце раздела 2-4, нам известно, что области $\mathscr{T}'_{j+k+1}$ и $\mathscr{P}\mathscr{T}'_{j+k+1}$ имеют общие вещественные точки и даже, более того, открытые множества вещественных точек, для которых $x - y$ принадлежит к некоторой заданной окрестности пространственноподобных четыре-векторов. В этой окрестности $\mathbf{F}_1 = F_1$ и $\mathbf{F}_2 = F_2$. Тем самым из условий

данной теоремы следует, что $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ в вещественном открытом множестве $\mathscr{U}$ и, следовательно, в комплексном открытом множестве.

Если бы в этот момент мы стали действовать необдуманно, то рассуждали бы так. Равенство функций $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ справедливо в силу аналитического продолжения всюду в $\mathscr{T}'_{j+k+1} \cup \mathscr{P}\mathscr{T}'_{j+k+1}$. Тем самым можно перейти к граничным значениям и получить равенство $F_1 = F_2$ для всех пространственноподобных $x - y$. Это рассуждение неверно по двум причинам. Во-первых, хотя известно, что функция $\mathbf{F}_1$ однозначна всюду в $\mathscr{T}'_{j+k+1}$, а функция $\mathbf{F}_2$ однозначна всюду в $\mathscr{P}\mathscr{T}'_{j+k+1}$, мы не показали, что они однозначны всюду в $\mathscr{T}'_{j+k+1} \cup \mathscr{P}\mathscr{T}'_{j+k+1}$. Во-вторых, если в соотношении

$$\mathbf{F}_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_{j+k+1}) =$$
$$= \mathbf{F}_2(\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-2}, \zeta_{j-1} + \zeta_j, -\zeta_j, \ \zeta_j + \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_{j+k+1}) \quad (4\text{-}5)$$

мы приближаемся к границе в области $\mathscr{T}_{j+k+1}$, причем мнимые части $\zeta_1, \ldots, \zeta_{j+k+1}$ лежат внутри соответствующего конуса, так что $\mathbf{F}_1 \to F_1$, то при этом в правой части (4-5) мы не приближаемся к границе области $\mathscr{T}_{j+k+1}$, так что у нас нет оснований считать, что $\mathbf{F}_2 \to F_2$. Мы обойдем эти возражения с помощью более скрупулезной аргументации. Другой метод доказательства, отличный от предлагаемого здесь, можно найти в [1]; в нем не используется теорема об острие клина.

Продолжая доказательство, в силу первого замечания можно предположить, что множество $\mathscr{U}$ зависит от $x - y$ только через $(x - y)^2$. Равенство $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ можно продолжить вдоль пути, заданного точками вида

$$\rho(x_1 - x_2), \ \ldots, \ \rho(x_{j-1} - x_j), \ \rho(x_j - x), \ \rho(x - y),$$
$$\rho(y - y_1), \rho(y_1 - y_2), \ldots, \rho(y_{k-1} - y_k), \ \rho > 0, \quad (4\text{-}6)$$

где точка с $\rho = 1$ находится в окрестности $\mathscr{U}$, введенной выше. Нетрудно видеть, что эта кривая принадлежит к совместному набору точек Йоста расширенных труб $\mathscr{T}'_{j+k+1}$ и $\mathscr{P}\mathscr{T}'_{j+k+1}$, если к нему принадлежит точка с $\rho = 1$. Очевидно, что и вообще четыре-вектор $x - y$ можно взять в точке с любым отрицательным значением $\xi^2 = \rho^2(x - y)^2$,

при этом открытое множество $\mathscr{U}$ преобразуется в другое открытое множество $\rho\mathscr{U}$. Следовательно, если $(x-y)^2<0$, то

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$$

в некотором открытом множестве $\rho\mathscr{U}$. (Очевидно, что это рассуждение позволяет избежать первой западни, упомянутой в предыдущем абзаце, а именно, возможной многозначности функций $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ в $\mathscr{T}'_{j+k+1} \cup \mathscr{P}\mathscr{T}'_{j+k+1}$.)

В качестве последнего шага доказательства покажем, что из равенства $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ при $(x-y)^2 < 0$ и при условии, что все переменные принадлежат к множеству $\rho\mathscr{U}$, следует его справедливость для всех $x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_k$ и всех пространственноподобных $x-y$. Для этой цели введем две новые обобщенные функции умеренного роста f_1 и f_2. Допустим, что четыре-вектор $x'-y'$ таков, что $(x'-y')^2 < 0$, и пусть $\rho\mathscr{U}$ — соответствующее открытое множество. Равенство

$$f_1(x_1-x_2, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_j, -y_1, y_1-y_2, \ldots, y_{k-1}-y_k) =$$
$$= \int h(x, y)\,dx\,dy\,(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_j)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(y_1)\ldots$$
$$\ldots\varphi(y_k)\Psi_0) \quad (4\text{-}7)$$

определяет функцию f_1. Функция f_2 определяется аналогично, только $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ следует поменять местами. Здесь h — основная функция с компактным носителем K, содержащим заданную точку $x'-y'$, причем носитель K достаточно мал, так что для каждого четыре-вектора $x-y$ из K, по которому проводится интегрирование в (4-7), множество $\rho\mathscr{U}$ всегда содержит фиксированное открытое множество V в пространстве остальных переменных $x_1-x_2, \ldots$ $\ldots, x_{j-1}-x_j, x_j, -y_1, y_1-y_2, \ldots, y_{k-1}-y_k$.

Обобщенные функции f_1 и f_2 представляют собой соответственно граничные значения голоморфных функций $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, которые голоморфны, если их аргументы изменяются в трубе $\mathscr{T}_{j+k+1}$ по переменным $x_1-x_2-i\eta_1, \ldots, x_{j-1}-$ $-x_j-i\eta_{j-1}$, $x_j-i\eta$, $-y_1-i\eta'$, $y_1-y_2-i\rho_2, \ldots, y_{k-1}-$ $-y_k-i\rho_{k-1}$. Это следует из теоремы 2-6, поскольку фурье-образы функций $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ обращаются в нуль, если их аргументы не принадлежат к физическому спектру. Применим

теперь теорему 2-17 к разности функций $\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2$. Она голоморфна в трубе $\mathscr{T}_{j+k+1}$ и тождественно исчезает в открытом множестве вещественных точек. Тем самым она обращается в нуль тождественно, и то же самое имеет место для ее граничного значения $f_1 - f_2$. Поскольку основная функция h произвольна, при условии, что ее носитель K принадлежит к достаточно малой окрестности точки $x' - y'$, заключаем, что $F_1 = F_2$ в некоторой окрестности этой точки. Поскольку $x' - y'$ — произвольный пространственноподобный четыре-вектор, то можно заключить *), что $F_1 = F_2$ при $(x-y)^2 < 0$. Значит,

$$(\Phi, [\varphi(x), \varphi(y)]\Psi) = 0 \text{ при } (x-y)^2 < 0, \ \Psi, \ \Phi \in D_0, \tag{4-8}$$

D_0 — область векторов состояния, полученных действием размазанных полей на вакуум. Поскольку D_0 — плотная область (в силу аксиомы цикличности), а скалярное произведение непрерывно, то получаем, что (4-8) имеет место для всех $\Phi \in D$, $\Psi \in D_0$. Воспользовавшись условием эрмитовости

$$-(\Phi, [\varphi(x), \varphi(y)]\Psi) = ([\varphi(x), \varphi(y)]\Phi, \Psi),$$

видим, что если $\Phi \in D$, $(x-y)^2 < 0$, то вектор

$$[\varphi(x), \varphi(y)]\Phi$$

ортогонален всем векторам $\Psi \in D_0$ и, следовательно, обращается в нуль. ▌

4-2. СВОЙСТВА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ ОТКРЫТОГО НАБОРА

Квантовая теория поля доставляет нам набор кандидатов для локальных измерений, наблюдаемых, которые соответствуют измерениям поля, осуществляемым в лаборатории конечных размеров и законченным в течение конечного промежутка времени. Это — операторы поля, размазанные по основным функциям с компактным носителем. В этом разделе мы займемся свойствами алгебры, связанной с такими величинами. Для простоты вновь обсуждается теория эрмитова скалярного поля.

---

*) См. раздел 2-1.

Пусть $\mathscr{P}(\mathscr{O})$ — набор всех полиномов вида

$$c + \sum_{j=1}^{N} \varphi(f_1^{(j)}) \dots \varphi(f_j^{(j)}), \tag{4-9}$$

где $f_k^{(j)}$ — основные функции, носитель которых содержится в открытом множестве $\mathscr{O}$ в пространстве-времени, а c — любая комплексная постоянная. Очевидно, что если p и q — два таких полинома, то к их числу принадлежат и $(p+q)$, ap, p^* и pq. Это означает, что $\mathscr{P}(\mathscr{O})$ представляет собой $*$-алгебру, или иначе *полиномиальную алгебру, связанную с* $\mathscr{O}$. Неожиданно справедлива следующая теорема: алгебра, связанная с *любым* открытым множеством $\mathscr{O}$, имеет Ψ_0 в качестве циклического вектора. Эта теорема принадлежит Ри и Шлидеру.

Теорема 4-2

Пусть $\mathscr{O}$ — открытое множество в пространстве-времени. Тогда Ψ_0 есть циклический вектор $\mathscr{P}(\mathscr{O})$, если он является циклическим вектором $\mathscr{P}(\mathbf{R}^4)$. Иначе говоря, векторы вида

$$\sum_{j=0}^{N} \varphi(f_1^{(j)}) \dots \varphi(f_j^{(j)}) \Psi_0 \tag{4-10}$$

с $\operatorname{supp} f_j^{(k)} \subset \mathscr{O}$ плотны в $\mathscr{H}$.

Доказательство

Пусть Ψ ортогонален всем векторам вида (4-10). Мы покажем, что тогда Ψ ортогонален и всем векторам, образованным действием полиномов по размазанным полям на вакуум, без каких-либо условий на носители основных функций, т. е. что Ψ ортогонален всем векторам вида $\mathscr{P}(\mathbf{R}^4)\Psi_0 = D_0$. Отсюда будет следовать, что $\Psi = 0$, так как, по предположению, гильбертово пространство $\mathscr{H}$ натянуто на векторы из D_0. Метод доказательства служит другим типичным примером применения принципа аналитического продолжения.

В качестве первого шага докажем, что символическое выражение

$$(\Psi, \Psi_f) = \int (\Psi, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) \times \\ \times f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

имеет смысл для всех основных функций f из $\mathcal{S}$ и для любого Ψ из $\mathcal{H}$. Это доказательство полностью аналогично доказательству, изложенному в замечаниях после формулы (3-24). Прежде всего отметим, что $(\Psi, \varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\Psi_0)$ — это непрерывный полилинейный функционал основных функций $f_1, \ldots, f_n$, и применим теорему Шварца о ядре, чтобы расширить его до обобщенной функции умеренного роста одновременно по всем переменным. Итак, это — обобщенная функция умеренного роста F, определенная равенством

$$F(-x_1,\ x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n) \equiv (\Psi,\ \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0).$$

Стандартные аргументы *) показывают, что фурье-образ функции F обращается в нуль, если хотя бы один из четыре-импульсов не принадлежит к физическому спектру. Тем самым существует голоморфная функция $\mathbf{F}$, голоморфная в трубе $\mathcal{T}_n$ по переменным $-x_1 - i\eta_1$, $(x_1 - x_2) - i\eta_2, \ldots$ $\ldots, (x_{n-1} - x_n) - i\eta_n$, граничным значением которой при $\eta_1, \ldots, \eta_n \to 0$ в V_+ является F. Это граничное значение обращается в нуль для точек $-x_1$, $x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n$ из открытого множества, определенного требованием $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}$. Значит, по теореме 2-17 функция $\mathbf{F}$ обращается в нуль и, следовательно, ее граничное значение обращается в нуль для всех $x_1, \ldots, x_n$. Отсюда следует, что вектор Ψ ортогонален к D_0. ▌

Из теории алгебр ограниченных операторов хорошо известно, что циклический вектор $*$-алгебры $\mathcal{P}$ — это отделяющий вектор ее коммутанта. Это означает следующее: если множество векторов $\mathcal{P}\Psi$ плотно, то из равенства $T\Psi = 0$ для некоторого оператора T, коммутирующего со всеми операторами из $\mathcal{P}$, следует, что $T = 0$. (Доказательство см. в [4].) Теорема 4-3 есть аналог этого утверждения

*) См. раздел 2-6.

в нашем случае. Ее можно интерпретировать в том смысле, что систему, описываемую полями, трудно изолировать от внешних эффектов. Если открытый набор $\mathcal{O}$ удовлетворяет определенному условию ограниченности, то алгебра $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ никогда не будет содержать никаких операторов рождения и уничтожения. Чтобы сформулировать условие ограниченности, рассмотрим множество всех точек, пространственноподобных каждой точке из $\mathcal{O}$. Внутреннюю часть этого множества обозначим $\mathcal{O}'$. Тогда утверждаем:

Теорема 4-3

Если $\mathcal{O}$ — открытый набор, для которого множество $\mathcal{O}'$ не пусто и $T \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, то из равенства

$$T\Psi_0 = 0 \tag{4.11}$$

следует, что $T = 0$.

Доказательство

Пусть Φ — вектор из области определения D поля φ. Пусть $\Psi = P'\Psi_0$, где $P' \in \mathcal{P}(\mathcal{O}')$. Тогда для любого $T \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, удовлетворяющего (4-11), имеет место

$$(\Psi, T^*\Phi) = (T\Psi, \Phi) = (TP'\Psi_0, \Phi) = (P'T\Psi_0, \Phi) = 0, \tag{4-12}$$

где в последнем равенстве было использовано (4-11). Поскольку в силу теоремы 4-2 на векторы вида Ψ натянуто пространство $\mathcal{H}$, то $T^*\Phi = 0$. Это в свою очередь приводит к $T\Psi = 0$ для $\Psi \in D$, так как $(T\Psi, \Phi) = (\Psi, T^*\Phi)$ и D плотна. ▌

Замечания

1. Теорема 4-3 остается справедливой, если вместо предположения об обращении в нуль коммутаторов полей, разделенных пространственноподобными интервалами, допустить, что обращаются в нуль антикоммутаторы. Этим мы воспользуемся при доказательстве теоремы 4-8.

2. Любое ограниченное открытое множество $\mathcal{O}$ обладает тем свойством, что соответствующее $\mathcal{O}'$ не пусто, и потому эта теорема к нему применима.

Теорема 4-4, также принадлежащая Ри и Шлидеру, устанавливает, что алгебра $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ становится неприводимой, если к ней присоединить хоть один оператор.

Теорема 4-4

Пусть E_0 — оператор проектирования на вакуумное состояние, которое предполагается циклическим относительно поля. Тогда для каждого открытого множества $\mathcal{O}$ набор операторов $\{E_0, \mathcal{P}(\mathcal{O})\}$ неприводим.

Доказательство

Вспомним определение неприводимого набора (3-8). Предположим, что для некоторого ограниченного оператора C и всех Φ, $\Psi \in D_0$ имеет место

$$(\Phi, C\varphi(f)\Psi) = (\varphi(f)^*\Phi, C\Psi), \tag{4-13}$$

где $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}$, и предположим, что

$$CE_0 = E_0C. \tag{4-14}$$

Тогда (4-13) выполняется, в частности, для состояния Ψ вида

$$\Psi = p\Psi_0, \quad p \in \mathcal{P}(\mathcal{O}), \tag{4-15}$$

а тогда

$$(\Phi, C\Psi) = (\Phi, Cp\Psi_0) = (p^*\Phi, C\Psi_0) = (p^*\Phi, CE_0\Psi_0) = \\ = (p^*\Phi, E_0C\Psi_0) = (p^*\Phi, \Psi_0)(\Psi_0, C\Psi_0), \tag{4-16}$$

где были использованы формулы (4-13), (4-14) и определение E_0:

$$E_0\Psi = (\Psi_0, \Psi)\Psi_0.$$

Очевидно, что из (4-16) следует

$$(\Phi, C\Psi) = c_0(\Phi, \Psi),$$

где

$$c_0 = (\Psi_0, C\Psi_0).$$

Поскольку ограниченный оператор непрерывен, а состояния Φ, Ψ плотны в пространстве $\mathcal{H}$, то отсюда следует, что $C = c_0$. ▌

Теорема 4-4 устанавливает, что для любого $\mathcal{O}$ добавление оператора E_0 к $\mathcal{P}(\quad)$ приводит к неприводимому набору операторов. Следующая теорема устанавливает, что для специального выбора $\mathcal{O}$, именно, для всего пространства-времени, оператор E_0 эффективно содержится в $\mathcal{P}(\ )$. Тем самым алгебра $\mathcal{P}(\quad)$ сама оказывается неприводимой. Доказательство дано для теории нейтрального скалярного поля. Нетрудно распространить его на набор полей с произвольными законами преобразования.

Теорема 4-5

В теории произвольных полей размазанные поля образуют неприводимый набор операторов.

Замечание

Вспомним, что в силу нашего определения теории поля вакуум является циклическим вектором для размазанных полей. Такая гипотеза существенна для справедливости теоремы. Эта теорема дает обещанное оправдание определению теории поля с помощью требования цикличности вакуума вместо требования неприводимости размазанных полей.

Доказательство

Заметим, что если C — ограниченный оператор, удовлетворяющий равенству

$$(\Phi, C\varphi(f)\Psi) = (\varphi^*(f)\Phi, C\Psi)$$

для всех $\Phi, \Psi \in D_0$, то C удовлетворяет и равенству

$$(\Phi, C\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\Psi) = (\varphi^*(f_n)\ldots\varphi^*(f_1)\Phi, C\Psi). \quad (4\text{-}17)$$

Рассмотрим, в частности, случай

$$(\Psi_0, C\varphi(\{a, 1\}f_1)\dots\varphi(\{a, 1\}f_n)\Psi_0) = \\ = (\varphi^*(\{a, 1\}f_n)\dots\varphi^*(\{a, 1\}f_1)\Psi_0, C\Psi_0). \qquad (4\text{-}18)$$

Перепишем последнее выражение, использовав закон преобразования φ и трансляционную инвариантность вакуумного состояния. Тогда

$$(\Psi_0, CU(a, 1)\varphi(f_1)\dots\varphi(f_n)\Psi_0) = \\ = (\varphi^*(f_n)\dots\varphi^*(f_1)\Psi_0, U(-a, 1)C\Psi_0).$$

Произведя в этом равенстве фурье-преобразование по a, получим, что

$$(\Psi_0, CE(S)\varphi(f_1)\dots\varphi(f_n)\Psi_0) = \\ = (\varphi^*(f_n)\dots\varphi^*(f_1)\Psi_0, E(-S)C\Psi_0),$$

где S — любой измеримый набор в импульсном пространстве. Это объяснено в разделе 2-6.

Поскольку, однако, спектр энергии-импульса находится внутри или на поверхности будущего светового конуса, то, если $-S$ принадлежит физическому спектру и не содержит точки $p = 0$, левая часть последнего равенства обращается в нуль. Это означает, что вектор $C\Psi_0$ ортогонален ко всем векторам $E(-S)\varphi^*(f_n)\dots\varphi^*(f_1)\Psi_0$, и поэтому $C\Psi_0 = c\Psi_0$, где c — комплексное число. Тогда равенство (4-17) для специального случая $\Psi = \Psi_0$ принимает вид

$$(\Phi, C\varphi(f_1)\dots\varphi(f_n)\Psi_0) = (\varphi^*(f_n)\dots\varphi^*(f_1)\Phi, C\Psi_0) = \\ = c(\Phi, \varphi(f_1)\dots\varphi(f_n)\Psi_0).$$

Отсюда следует, что

$$(\Phi, C\Psi) = c(\Phi, \Psi)$$

для всех $\Phi, \Psi \in D_0$, и тогда в силу непрерывности C и плотности D_0 получаем, что $C = c$. ▌

Следует подчеркнуть, что, хотя для всех алгебр $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ вакуум цикличен, неприводимыми оказываются не все из них. Например, если $\mathcal{O} \neq \mathbf{R}^4$, то равенство (4-18) для всех

a доказать нельзя при условии, что (4-17) задано только для основных функций с носителем в $\mathcal{O}$. В частности, невозможно доказать аксиому о временно̀м слое (раздел 3-2). Например, в теории, описывающей взаимодействие нуклонов с π-мезонами (предполагаем, что все частицы стабильны), можно ввести поля ψ_p, ψ_n и $\varphi^{\pm}$, φ^0 соответственно для частиц p, n и $\pi^{\pm}$, π^0. В теории, в которой справедлива аксиома асимптотической полноты, гильбертово пространство (включая π-мезоны) натянуто на состояния вида $\mathcal{P}(\psi_p, \psi_n)\Psi_0$. Это следует из теории Хаага — Рюэля, если состояния $\mathcal{P}(\psi_p, \psi_n)\Psi_0$ не ортогональны одномезонным состояниям. Тогда теорема 4-5 приводит к тому, что операторы (ψ_p, ψ_n), проинтегрированные с произвольными основными функциями, образуют неприводимый набор. Аналогичным образом можно показать, что (ψ_p, φ^-) и (ψ_n, φ^+) всегда могут выступить в роли других неприводимых наборов операторов. Однако, насколько нам известно, может случиться так, что в одной теории набор (ψ_p, ψ_n) во временно̀м слое неприводим, тогда как в другой теории он приводим, а набор $(\psi_p, \psi_n, \varphi)$ неприводим. Эта проблема тесно связана с вопросом, является ли пион в каком-то смысле связанным состоянием нуклона и антинуклона или нет.

Естественное развитие идей этого параграфа привело бы к введению понятия алгебры фон Неймана $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ открытого множества $\mathcal{O}$. Эта алгебра есть $*$-алгебра *ограниченных* операторов. Наиболее естественно эти операторы получаются с помощью спектрального разложения эрмитовых элементов $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, причем берется алгебра, порождаемая их спектральными проекциями. Мы не будем здесь вдаваться в объяснение такого построения. Заметим только, что есть веские основания для убеждения, что изучение алгебр $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ — стоящее дело. Существуют соображения, в силу которых две теории поля, относящиеся к одному и тому же представлению группы Лоренца, приводят к одной и той же S-матрице в том и только в том случае, если их алгебры $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ изоморфны*). Этот факт придает интерес теоремам данного раздела.

*) См. [3] в библиографии к главе 3.

4-3. ТЕОРЕМА PCT

В разделе 3-5 было показано, что существование Θ, оператора преобразования *PCT*, эквивалентно справедливости тождеств (3-66)

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1)\ldots\varphi_n(x_n)\Psi_0) = \\ = (-1)^J\, i^F(\Psi_0, \varphi_n(-x_n)\ldots\varphi_1(-x_1)\Psi_0). \quad (4\text{-}19)$$

В этом разделе будет доказано, что тождества (4-19) справедливы в любой теории локальных полей. В этом состоит содержание теоремы *PCT* или теоремы Людерса — Паули. Фактически будет получен более точный результат, из которого следует, что достаточным условием справедливости тождеств (4-19) является более слабое условие так называемой *слабой локальной коммутативности.* Эта усовершенствованная формулировка, которую мы также будем называть теоремой *PCT*, а также и способ ее доказательства принадлежат Йосту.

Ради ясности мы сформулируем и докажем теорему *PCT* сначала для теории нейтрального скалярного поля и только впоследствии распространим ее на случай произвольных полей.

Теорема 4-6 (*Теорема PCT для нейтрального скалярного поля*)

Пусть φ — эрмитово скалярное поле, удовлетворяющее аксиомам I и II, но не обязательно аксиоме III (аксиома локальной коммутативности — ЛК). Если выполняется условие инвариантности относительно преобразования *PCT*

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) = \\ = (\Psi_0, \varphi(-x_n)\ldots\varphi(-x_1)\Psi_0) \quad (4\text{-}20)$$

для всех $x_1, \ldots, x_n$, то для каждой совокупности $x_1, \ldots, x_n$ такой, что $x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n$ есть точка Йоста, выполняется условие слабой локальной коммутативности (СЛК)

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) = \\ = (\Psi_0, \varphi(x_n)\ldots\varphi(x_1)\Psi_0). \quad (4\text{-}21)$$

Напротив, если условие СЛК (4-21) выполнено в (вещественной) окрестности точки Йоста, то условие инвариантности относительно PCT (4-20) справедливо всюду.

Поскольку ЛК, приводит к СЛК, то любая теория поля с локальным эрмитовым скалярным полем обладает PCT-симметрией.

Доказательство

Наш первый шаг будет состоять в том, чтобы перевести условие PCT (4-20) в эквивалентное соотношение для голоморфной функции. Из теоремы 3-5 мы знаем, что существует голоморфная функция $\mathbf{W}$, зависящая от $(n-1)$ комплексного вектора $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$, где $\zeta_j = \xi_j - i\eta_j$, $\xi_j = x_j - x_{j+1}$. Она голоморфна в расширенной трубе $\mathscr{T}'_{n-}$ и при этом

$$\lim_{\substack{\eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \to 0 \\ \in V_+}} \mathbf{W}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = W(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) =$$

$$= (\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \Psi_0). \quad (4\text{-}22)$$

Кроме того, из теоремы 3-5 следует, что функция $\mathbf{W}$ инвариантна относительно преобразований из комплексной собственной группы Лоренца

$$\mathbf{W}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = \mathbf{W}(\Lambda\zeta_1, \ldots, \Lambda\zeta_{n-1}) \quad (4\text{-}23)$$

для $\Lambda \in L_+(C)$ и всех $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1} \in \mathscr{T}'_{n-1}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathbf{W}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) =$$

$$= \mathbf{W}(-\zeta_1, \ldots, -\zeta_{n-1}) \text{ для } \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1} \in \mathscr{T}'_{n-1}. \quad (4\text{-}24)$$

Это соотношение нам вскоре понадобится. Правая часть (4-20) представляет собой также граничное значение голоморфной функции

$$\lim_{\substack{\eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \to 0 \\ \in V_+}} \mathbf{W}(\zeta_{n-1}, \ldots, \zeta_1) = W(\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1) =$$

$$= (\Psi_0, \varphi(-x_n) \varphi(-x_{n-1}) \ldots \varphi(-x_1) \Psi_0). \quad (4\text{-}25)$$

Разность функций $\mathbf{W}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) - \mathbf{W}(\zeta_{n-1}, \ldots, \zeta_n)$ голоморфна во всей трубе $\mathscr{T}_{n-1}$ и обращается в нуль в силу (4-20) для вещественных $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$. Отсюда нетрудно увидеть, что в силу теоремы 2-17 из (4-20) следует, что

$$\mathbf{W}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = \mathbf{W}(\zeta_{n-1}, \ldots, \zeta_1). \tag{4-26}$$

Наоборот, если равенство (4-26) справедливо в произвольной окрестности точки из $\mathscr{T}'_{n-1}$, то оно справедливо всюду в $\mathscr{T}'_{n-1}$, и, переходя к границе внутри трубы $\mathscr{T}_{n-1}$, получаем (4-20). Тем самым (4-20) полностью эквивалентно соотношению (4-26) для голоморфной функции $\mathbf{W}$.

Объединим теперь соотношения (4-24) и (4-26), чтобы получить равенство

$$\mathbf{W}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = \mathbf{W}(-\zeta_{n-1}, \ldots, -\zeta_1), \tag{4-27}$$

справедливое всюду в $\mathscr{T}'_{n-1}$. Если бы мы попытались перейти в этом соотношении к границе области, то мы не получили бы соотношения между вакуумными средними, поскольку, когда векторы $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ приближаются к вещественным значениям в будущей трубе $\mathscr{T}_{n-1}$, векторы $-\zeta_{n-1}, \ldots, -\zeta_1$ приближаются к вещественным значениям в прошлой трубе. Однако в вещественной точке голоморфности (точке Йоста) равенство (4-27) *приводит* к соотношению между вакуумными средними, именно,

$$\begin{aligned} W(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) &= (\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) = \\ &= W(-\xi_{n-1}, \ldots, -\xi_1) = (\Psi_0, \varphi(x_n)\ldots\varphi(x_1)\Psi_0), \end{aligned} \tag{4-28}$$

которое в точности совпадает с условием СЛК. Таким образом, первая половина теоремы доказана.

Обратное утверждение доказать легко. Если соотношение (4-28) справедливо в вещественной окрестности вещественной точки голоморфности, то оно справедливо в комплексной окрестности этой точки и, следовательно, в силу аналитического продолжения (4-27) справедливо всюду в $\mathscr{T}'_{n-1}$. Вследствие инвариантности относительно комплексной группы Лоренца [см. (4-24)] отсюда получается соотношение (4-26), которое, как было показано выше, эквивалентно условию PCT-инвариантности для вакуумных средних.

Последнее утверждение теоремы немедленно вытекает из того факта, что в точке Йоста все векторы $x_j - x_k$, $j \neq k$,

пространственноподобны (см. теорему 2-12). Поэтому из аксиомы III (ЛК) с очевидностью следует выполнение условия СЛК в этой точке. ▌

Доказательство теоремы *PCT* для теории полей φ_α, $\varphi_\beta, \ldots$, преобразующихся согласно общим неприводимым представлениям группы Лоренца, проводится аналогичным образом. Функция W не является более инвариантом, а вместо этого подчиняется следующему закону преобразования относительно $SL(2, C) \otimes SL(2, C)$:

$$\sum_{\mu' \ldots \nu'} S^{(\varphi)}_{\mu\mu'}(A, B) \ldots S^{(\psi)}_{\nu\nu'}(A, B)\, \mathrm{W}_{\mu', \ldots, \nu'}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) =$$
$$= \mathrm{W}_{\mu \ldots \nu}(\Lambda(A, B)\zeta_1, \ldots, \Lambda(A, B)\zeta_{n-1}). \qquad (4\text{-}29)$$

Здесь функция $\mathrm{W}_{\mu\ldots\nu}$ голоморфна в $\mathscr{T}'_{n-1}$ и

$$\lim_{\substack{\eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \to 0 \\ \in V_+}} \mathrm{W}_{\mu\ldots\nu}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = W_{\mu\ldots\nu}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) =$$
$$= (\Psi_0, \varphi_\mu(x_1) \ldots \psi_\nu(x_n) \Psi_0). \qquad (4\text{-}30)$$

Равенство (4-29) — аналог равенства (4-23). Из него следует, что если полное число индексов без точек и индексов с точкой нечетно, то соответствующее вакуумное среднее обращается в нуль. Чтобы убедиться в этом, сравним (4-29) для случаев $\{A, B\} = \{-1, 1\}$ и $\{1, -1\}$. Правая сторона равенства в этих двух случаях одна и та же, поскольку $\Lambda(-1, 1) = \Lambda(1, -1) = -1$, в то время как левая сторона в силу (1-27) имеет противоположные знаки. В любом случае

$$S^{(\varphi)}_{\mu\mu'}(-1, 1) \ldots S^{(\psi)}_{\nu\nu'}(-1, 1) = \delta_{\mu\mu'} \ldots \delta_{\nu\nu'}(-1)^J, \qquad (4\text{-}31)$$

где J — полное число индексов без точек. Поэтому аналогом (4-24) будет равенство

$$\mathrm{W}_{\mu\ldots\nu}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = (-1)^J \mathrm{W}_{\mu\ldots\nu}(-\zeta_1, \ldots, -\zeta_{n-1}) \qquad (4\text{-}32)$$

для всех $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1} \in \mathscr{T}'_{n-1}$.

В случае произвольных полей аналогом условия *PCT*-инвариантности (4-20) является условие (4-19). Оно приводит к следующему соотношению между голоморфными

функциями:

$$\mathbf{W}_{\mu\ldots\nu}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = i^F(-1)^J \hat{\mathbf{W}}_{\nu\ldots\mu}(\zeta_{n-1}, \ldots, \zeta_1), \tag{4-33}$$

где функция $\hat{\mathbf{W}}_{\nu\ldots\mu}$ голоморфна в $\mathcal{T}'_{n-1}$ и имеет граничное значение вида

$$\lim_{\substack{\eta_1,\ldots,\eta_{n-1}\to 0\\ \in V_+}} \hat{\mathbf{W}}_{\nu\ldots\mu}(\zeta_{n-1}, \ldots, \zeta_1) = \hat{W}_{\nu\ldots\mu}(\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1) =$$

$$= (\Psi_0, \psi_\nu(-x_n)\ldots\varphi_\mu(-x_1)\Psi_0). \tag{4-34}$$

Комбинация равенств (4-32) и (4-33) приводит к аналогичному (4-27) соотношению

$$\mathbf{W}_{\mu\ldots\nu}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = i^F \hat{\mathbf{W}}_{\nu\ldots\mu}(-\zeta_{n-1}, \ldots, -\zeta_1), \tag{4-35}$$

которое в вещественной точке расширенной трубы $\mathcal{T}'_{n-1}$ превращается в

$$(\Psi_0, \varphi_\mu(x_1)\ldots\psi_\nu(x_n)\Psi_0) = i^F(\Psi_0, \psi_\nu(x_n)\ldots\varphi_\mu(x_1)\Psi_0). \tag{4-36}$$

Это — условие СЛК для данного случая, и нам осталось только проверить, что оно вытекает из перестановочных соотношений полей. Предположим, что эти соотношения относятся к «нормальному» типу. Это значит, что на пространственноподобных интервалах все поля коммутируют, исключая те, полное число индексов у которых нечетно, а эти поля антикоммутируют. Отсюда немедленно следует появление множителя $(-1)^{(F-1)+(F-2)+\ldots+1} = (-1)^{F(F-1)/2} = i^F$, где последнее равенство имеет место благодаря тому, что в соответствующих случаях F четно. Если использовать соотношения (4-29) — (4-36), то доказательство теоремы можно провести в точности так же, как и раньше. Суммируя сказанное, сформулируем:

Теорема 4-7 (*Теорема PCT для полей с произвольным спином*)

Пусть $\varphi_\mu, \ldots, \psi_\nu$ — спинорные поля, удовлетворяющие аксиомам I и II, но не обязательно аксиоме III (ЛК). Если для всех точек $x_1, \ldots, x_n$ справедливо условие инвариантности

относительно преобразования PCT

$$(\Psi_0, \varphi_\mu(x_1)\ldots\psi_\nu(x_n)\Psi_0) = \\ = i^F(-1)^J(\Psi_0, \psi_\nu(-x_n)\ldots\varphi_\mu(-x_1)\Psi_0),$$

то для каждой совокупности $x_1, \ldots, x_n$ такой, что $x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n$ есть точка Йоста, справедливо условие СЛК

$$(\Psi_0, \varphi_\mu(x_1)\ldots\psi_\nu(x_n)\Psi_0) = \\ = i^F(\Psi_0, \psi_\nu(x_n)\ldots\varphi_\mu(x_1)\Psi_0).$$

Напротив, если условие СЛК справедливо в (вещественной) окрестности точки Йоста, то условие инвариантности относительно PCT справедливо всюду.

Из нормальных перестановочных соотношений полей $\varphi, \ldots, \psi$ следуют условия СЛК, так что всякая теория полей с нормальными перестановочными соотношениями обладает PCT-симметрией.

Как будет показано в следующем разделе, если поля удовлетворяют «аномальным» перестановочным соотношениям, теория будет также PCT-симметрична. Однако определение такой симметрии будет теперь отличаться от определения (1-53) на дополнительный множитель ± 1. Этот вопрос будет обсуждаться в конце следующего раздела.

Следует подчеркнуть, что, хотя предположение о локальной коммутативности приводит к тому, что теория поля оказывается PCT-симметричной, однако для такого вывода необходима только слабая локальная коммутативность. Этот факт важен с принципиальной точки зрения, поскольку относительно просто придумать теорию поля, которая удовлетворяла бы условию слабой локальной коммутативности (но не условию локальной коммутативности) и имела бы нетривиальную S-матрицу. Такая теория была бы PCT-симметрична. Тем самым наблюдаемая в природе PCT-симметрия не является существенным доводом в пользу гипотезы локальной коммутативности.

4-4. СПИН И СТАТИСТИКА

Все экспериментальные факты указывают на то, что системы с целым спином подчиняются законам статистики Бозе — Эйнштейна, а системы с полуцелым спином подчиняются законам статистики Ферми — Дирака. Хотя существуют вполне приемлемые законы статистик, отличных как от статистики Бозе — Эйнштейна, так и от статистики Ферми — Дирака, до сих пор не наблюдалось ни одной системы, которая подчинялась бы им (см. [28]). Естественный путь, ведущий к статистике Бозе — Эйнштейна, состоит в том, чтобы рассматриваемую систему описывать с помощью поля, коммутирующего в пространственноподобных точках. Аналогичный путь, ведущий к статистике Ферми — Дирака, состоит в употреблении поля, антикоммутирующего в пространственноподобных точках. Теорема о связи спина со статистикой, или, как мы будем говорить для краткости, теорема о спине и статистике, утверждает, что в квантовой теории поля нетривиальное поле с целым спином в пространственноподобных точках не может антикоммутировать, а нетривиальное поле с полуцелым спином в тех же точках не может коммутировать. Оставляя в стороне вопрос о возможности существования статистик, законы которых отличаются от законов статистик Бозе — Эйнштейна или Ферми — Дирака, теорема о спине и статистике объясняет экспериментальные результаты.

Когда переходят от перестановочных соотношений для данного поля к перестановочным соотношениям между разными полями, положение становится более сложным. Оказывается, что «аномальные» перестановочные соотношения, в силу которых два поля с целыми спинами или поле с целым и поле с полуцелым спином антикоммутируют, а два поля с полуцелыми спинами коммутируют, могут быть реализованы. Однако, вообще говоря, возникающие при этом теории будут обладать свойствами симметрии специального вида. В силу наличия таких свойств симметрии в указанных теориях всегда существует такой набор полей, которые удовлетворяют нормальным перестановочным соотношениям и связаны с первоначальными полями так называемым преобразованием Клейна. Исходную тео-

рию можно с равным успехом сформулировать как теорию с этим набором полей. В этом смысле теория с аномальными перестановочными соотношениями представляет собой специальный случай теории с нормальными перестановочными соотношениями, когда теория обладает некоторым набором свойств симметрии.

Докажем все эти утверждения по порядку. Следуя Дель'Антонио, сначала рассмотрим теорию, в которой компонента поля φ имеет разные перестановочные соотношения с компонентой поля ψ и сопряженной ей величиной ψ^*.

Теорема 4-8

Если в некоторой теории поля

$$[\varphi(x), \psi(y)]_{\pm} = 0 \qquad \text{для} \quad (x-y)^2 < 0$$

и в то же время (4-37)

$$[\varphi(x), \psi^*(y)]_{\mp} = 0,$$

то либо поле φ, либо поле ψ обращается в нуль.

Доказательство

Если f и g — две основные функции с компактным носителем, то

$$(\Psi_0, \varphi^*(f)\psi^*(g)\psi(g)\varphi(f)\Psi_0) = \|\psi(g)\varphi(f)\Psi_0\|^2 \geqslant 0. \tag{4-38}$$

Если носители функций f и g разделены пространственноподобным интервалом, то из предполагаемых перестановочных соотношений (4-37) следует, что левая часть (4-38) имеет вид

$$-(\Psi_0, \psi^*(g)\psi(g)\varphi^*(f)\varphi(f)\Psi_0). \tag{4-39}$$

В силу свойства разложения на пучки, если носитель функции g стремится к бесконечности по пространственноподобному направлению, выражение (4-39) приближается к выражению

$$-(\Psi_0, \psi^*(g)\psi(g)\Psi_0)(\Psi_0, \varphi^*(f)\varphi(f)\Psi_0) =$$
$$= -\|\psi(g)\Psi_0\|^2 \|\varphi(f)\Psi_0\|^2,$$

а последнее явно не положительно. Поэтому, сравнивая с (4-38), приходим к выводу, что единственным допустимым значением этого предела оказывается 0, и либо $\psi(g)\Psi_0 = 0$, либо $\varphi(f)\Psi_0 = 0$. По теореме 4-3 отсюда следует, что либо $\psi(g) = 0$, либо $\varphi(f) = 0$. Если $\psi \neq 0$, то существует основная функция с компактным носителем g, для которой $\psi(g) \neq 0$. Тогда для всех основных функций f с компактным носителем $\varphi(f) = 0$. Поскольку основные функции с компактным носителем плотны в $\mathcal{S}$, то отсюда следует что $\varphi = 0$. Аналогично если $\varphi \neq 0$, то $\psi = 0$. ▮

Следствие

В теории поля не может существовать никаких отличных от нуля полей, удовлетворяющих одновременно

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_{\pm} = 0 \tag{4-40}$$

и

$$[\varphi(x), \varphi^*(y)]_{\mp} = 0 \qquad \text{для всех} \quad (x-y)^2 < 0.$$

Дальше мы докажем собственно теорему о спине и статистике. Для ясности будем сначала рассматривать скалярное поле, а затем опишем изменения, необходимые для полей с произвольным спином.

Теорема 4-9 (*Теорема о спине и статистике для скалярного поля*)

Пусть φ — скалярное поле. Предположим, что

$$[\varphi(x), \varphi^*(y)]_{+} = 0 \qquad \text{для} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{4-41}$$

Тогда

$$\varphi(x)\Psi_0 = 0 = \varphi^*(x)\Psi_0.$$

В теории поля, в которой φ и φ^* коммутируют или антикоммутируют со всеми другими полями, отсюда следует $\varphi = \varphi^* = 0$.

Доказательство

Гипотеза (4-41) о «неправильной» связи спина со статистикой приводит к

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi^*(y)\Psi_0) + (\Psi_0, \varphi^*(y)\varphi(x)\Psi_0) = 0 \quad (4\text{-}42)$$

при $(x-y)^2 < 0$. Каждое из вакуумных средних в этом равенстве зависит только от $(x-y)$ и является граничным значением голоморфной функции

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \varphi(x)\varphi^*(y)\Psi_0) &= \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta\in V_+}} W(x-y-i\eta),\\ (\Psi_0, \varphi^*(y)\varphi(x)\Psi_0) &= \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta\in V_+}} \hat{W}(y-x-i\eta),\end{aligned} \quad (4\text{-}43)$$

где функции W и $\hat{W}$ голоморфны при $\eta \in V_+$. Поскольку функции W и $\hat{W}$ инвариантны относительно ограниченной группы Лоренца, то в силу теоремы 2-11 они инвариантны относительно собственной комплексной группы Лоренца. Поэтому они голоморфны в расширенной трубе $\mathcal{T}'_1$ по переменной $\zeta = (x-y) - i\eta$, которая включает в себя все точки, где вектор ζ веществен и пространственноподобен. Таким образом, равенство (4-42) — это соотношение между голоморфными функциями

$$W(\zeta) + \hat{W}(-\zeta) = 0, \quad (4\text{-}44)$$

которое справедливо в открытом множестве вещественных точек расширенной трубы и тем самым всюду в расширенной трубе. Используя инвариантность $\hat{W}$ относительно преобразования из комплексной собственной группы Лоренца с $\Lambda = -1$, получим:

$$\hat{W}(\zeta) = \hat{W}(-\zeta), \quad (4\text{-}45)$$

и из (4-44) следует, что равенство

$$W(\zeta) + \hat{W}(\zeta) = 0 \quad (4\text{-}46)$$

справедливо для $\zeta \in \mathcal{T}'_1$.

Переходя в (4-46) к граничным значениям, т. е. устремляя $\eta \to 0$, $\eta \in V_+$, получим соотношение между

обобщенными функциями, справедливое для *всех* x и y

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi^*(y)\Psi_0) + (\Psi_0, \varphi^*(-y)\varphi(-x)\Psi_0) = 0. \quad (4\text{-}47)$$

Мы утверждаем, что соотношение (4-47) приводит к $\varphi(x)\Psi_0 = 0$. Чтобы доказать это, положим $\hat{f}(x) = f(-x)$. Тогда, вспоминая, что $\varphi^*(f) = [\varphi(\bar{f})]^*$,

$$\varphi(f) = \int dx\, f(x)\varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi(\hat{f}) = \int dx\, f(-x)\varphi(x) = \\ = \int dx\, f(x)\varphi(-x),$$

получим:

$$\|\varphi^*(f)\Psi_0\|^2 + \|\varphi(\hat{f})\Psi_0\|^2 = \\ = (\Psi_0, \varphi(f)\varphi^*(f)\Psi_0) + (\Psi_0, \varphi^*(\hat{f})\varphi(\hat{f})\Psi_0) = \\ = \int dx\, dy f(x)\overline{f(y)}[(\Psi_0, \varphi(x)\varphi^*(y)\Psi_0) + \\ + (\Psi_0, \varphi^*(-y)\varphi(-x)\Psi_0)] = 0.$$

Таким образом, для всех основных функций f имеет место равенство $\|\varphi(f)\Psi_0\| = \|\varphi^*(f)\Psi_0\| = 0$, что приводит к $\varphi(f)\Psi_0 = 0$ и позволяет завершить доказательство первой половины теоремы.

В любой теории поля, в которой все поля либо коммутируют, либо антикоммутируют, справедлива теорема 4-3, и поэтому из $\varphi(f)\Psi_0 = 0$ следует, что $\varphi = \varphi^* = 0$. ∎

Для полей с произвольным спином аналогом теоремы 4-9 является

Теорема 4-10 (*Теорема о спине и статистике для полей с произвольным спином*)

Для неприводимого спинорного поля с произвольным спином «неправильная» связь между спином и статистикой вида

$$[\varphi_\alpha(x), \varphi^*_\alpha(y)]_+ = 0, \quad \varphi \text{ — поле с целым спином,}$$
$$[\varphi_\alpha(x), \varphi^*_\alpha(y)]_- = 0, \quad \varphi \text{ — поле с полуцелым спином, для } (x-y)^2 < 0 \quad (4\text{-}48)$$

приводит к равенству $\varphi_\alpha(x)\Psi_0 = 0$. В теории поля, в которой все поля либо коммутируют, либо антикоммутируют, отсюда следует, что $\varphi_\alpha = \overset{*}{\varphi}_\alpha = 0$.

Доказательство

Без смущения опустим индекс α. Доказательство идет по тому же пути, что и в случае скалярного поля. Условия (4-48) непосредственно приводят к

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi^*(y)\Psi_0) \pm (\Psi_0, \varphi^*(y)\varphi(x)\Psi_0) = 0 \quad \text{для} \quad (x-y)^2 < 0, \tag{4-49}$$

причем знак выбирается в соответствии со знаком в (4-48). Это является обобщением соотношения (4-42). Как и в доказательстве теоремы 4-9, воспользуемся тем, что существуют такие голоморфные функции W и $\hat{W}$, через которые вакуумные средние выражаются формулами (4-43). Обобщением (4-44) в данном случае будет равенство

$$W(\zeta) \pm \hat{W}(-\zeta) = 0. \tag{4-50}$$

В то же время из (4-45) следует:

$$\hat{W}(\zeta) = (-1)^J \hat{W}(-\zeta), \tag{4-51}$$

где J — полное число индексов без точек в $\varphi\varphi^*$. Формула (4-51) является следствием закона преобразования функции $\hat{W}$ относительно группы $SL(2, C) \otimes SL(2, C)$ и частным случаем формулы (4-32). Отметим, что число индексов без точек в произведении $\varphi\varphi^*$ совпадает с полным числом индексов в φ и поэтому будет четным (нечетным), если поле φ обладает целым (полуцелым) спином. Следовательно, в точках области голоморфности

$$\hat{W}(\zeta) = \pm \hat{W}(-\zeta), \tag{4-52}$$

где знак соответствует знаку в (4-48). Комбинируя (4-52) и (4-50), можно получить равенство (4-46) в точности в том же виде, что и прежде. Начиная с этого момента, аргументация полностью совпадает с аргументацией, использованной выше при доказательстве теоремы 4-9. ▌

Вернемся теперь к обсуждению перестановочных соотношений между разными полями. Начнем с примера, который простейшим образом проиллюстрирует ряд возникающих проблем.

Пример 1. Скалярное поле и поле спина 1/2, антикоммутирующие между собой

Предположим, что φ — скалярное поле, а ψ — поле спина 1/2, причем φ и ψ антикоммутируют в пространственноподобных точках. Можно определить новые поля φ' и ψ' равенствами

$$\varphi'(x)\Psi_1 = \varphi(x)\Psi_1, \qquad \psi'(x)\Psi_1 = \psi(x)\Psi_1,$$

если Ψ_1 — вектор из области определения D полей φ, ψ в когерентном подпространстве $\mathscr{H}_1$ пространства $\mathscr{H}$, соответствующем представлению с целым спином группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, и равенствами

$$\varphi'(x)\Psi_2 = -\varphi(x)\Psi_2, \qquad \psi'(x)\Psi_2 = \psi(x)\Psi_2,$$

если Ψ_2 — вектор из D в когерентном подпространстве $\mathscr{H}_2$ пространства $\mathscr{H}$, соответствующем представлению с полуцелым спином группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Действие операторов φ', ψ' на линейную суперпозицию состояний из подпространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ определено в силу линейности. Между состояниями из $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ действует правило суперотбора (унивалентное правило суперотбора). Напомним (см. раздел 1-1), что линейные суперпозиции состояний из различных когерентных подпространств, между которыми действует правило суперотбора, физически нереализуемы. В данном случае состояние $\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$ при повороте на угол 2π вокруг произвольной оси переходит в состояние $\alpha\Psi_1 - \beta\Psi_2$. Но оно должно принадлежать тому же самому лучу, и поэтому такое состояние физически нереализуемо, кроме случаев, когда $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Нетрудно видеть, что новые поля φ', ψ' коммутируют в пространственноподобных точках. Иными словами, в противоположность полям φ, ψ новые поля удовлетворяют нормальным перестановочным соотношениям. Переход от полей φ, ψ к полям φ', ψ' называется

преобразованием Клейна. В отличие от преобразований, обсуждавшихся в разделе 3-5, в данном случае не существует никакого унитарного или антиунитарного преобразования V такого, что

$$\varphi' = V\varphi V^{-1}, \qquad \psi' = V\psi V^{-1},$$

ибо существование такого V приводило бы к

$$[\varphi'(x), \psi'(y)]_- = V[\varphi(x), \psi(y)]_- V^{-1}.$$

Можно принять две точки зрения на преобразование $\varphi, \psi \to \varphi', \psi'$. Согласно первой, это просто «замена переменных». Наблюдаемые в теории оказываются некоторыми функциями полей φ, ψ, а они в свою очередь — функциями полей φ', ψ'. Поэтому наблюдаемые представляют собой некоторые (другие) функции полей φ', ψ'. Предшествующая дискуссия просто отражает тот факт, что с помощью замены переменных наблюдаемые могут быть выражены через набор полей, удовлетворяющих нормальным перестановочным соотношениям.

Согласно второй точке зрения это преобразование приводит к другому соответствию между операторами и операциями в лаборатории. Если некая функция, скажем $F(\varphi, \psi)$, наблюдаема и соответствует некоторым хорошо определенным измерениям в лаборатории, то преобразование Клейна следует рассматривать как преобразование, приводящее к новой теории, в которой функция $F(\varphi', \psi')$ соответствует тому же самому набору измерений. Естественно возникает вопрос, предсказывают ли обе теории одни и те же результаты для всех экспериментов. Ответ на этот вопрос может дать только подробный анализ теории измерений системы. Чем больше операторов должно быть наблюдаемо, тем меньше шансов на то, что такие две теории физически эквивалентны. В рассматриваемом примере имеет место равенство

$$(\Psi_2, \varphi(x)\Psi_2) = -(\Psi_2, \varphi'(x)\Psi_2).$$

Поэтому если поле $\varphi(x)$ наблюдаемо, то эти две теории различны. В другом крайнем случае, когда наблюдаемы только результаты экспериментов по рассеянию, эти теории предсказывают одинаковые результаты. Последнее обсуждается ниже в связи с теоремой PCT.

Только что рассмотренный пример имеет одну особенность, не характерную для общей ситуации с аномальными перестановочными соотношениями. Именно, существование ортогональных подпространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, инвариантных относительно $U(a, \Lambda)$, в данном случае есть уже следствие унивалентного правила суперотбора. Вообще же говоря, существование, ортогональность и инвариантность аналогичных подпространств — это следствие самих аномальных перестановочных соотношений. Поскольку в этой ситуации проявляется несколько новых особенностей проблемы, проиллюстрируем ее на втором простом примере.

Пример 2. Скалярное и два спинорных поля спина 1/2

Рассмотрим теорию одного эрмитова скалярного поля φ и двух эрмитовых полей ψ_1 и ψ_2 с полуцелым спином. Для простоты спинорные индексы полей ψ_1 и ψ_2 опускаем. Предположим, что имеют место нормальные перестановочные соотношения вида

$$[\psi_1(x), \psi_2(y)]_+ = 0 = [\varphi(x), \psi_2(y)]_-, \quad (x-y)^2 < 0 \qquad (4\text{-}53)$$

и одновременно «аномальные» перестановочные соотношения вида

$$[\varphi(x), \psi_1(y)]_+ = 0, \quad (x-y)^2 < 0. \qquad (4\text{-}54)$$

Как сейчас будет показано, из этих соотношений следует обращение в нуль некоторых вакуумных средних. Имея в виду дальнейшие применения, сформулируем и докажем этот результат для теории полей с произвольным спином.

Теорема 4-11

В любой локальной теории поля, если $M(x_1, \ldots, x_j)$ и $N(y_1, \ldots, y_k)$ — два одночлена по компонентам поля, антикоммутирующих в множествах точек (x) и (y), разделенных пространственноподобными интервалами, то либо $(\Psi_0, M\Psi_0) = 0$, либо $(\Psi_0, N\Psi_0) = 0$.

Доказательство

Рассмотрим равенство

$$
\begin{aligned}
(\Psi_0, M(x_1, \ldots, x_j) N(y_1 + a, \ldots, y_k + a)\Psi_0) = \\
= -(\Psi_0, N(y_1 + a, \ldots, y_k + a) M(x_1, \ldots, x_j)\Psi_0) \quad (4\text{-}55)
\end{aligned}
$$

в случае, если a — большой пространственноподобный вектор. Предел этого равенства при $a \to \infty$ в силу свойства разложения на пучки (теорема 3-4) имеет вид

$$
(\Psi_0, M\Psi_0)(\Psi_0, N\Psi_0) = -(\Psi_0, N\Psi_0)(\Psi_0, M\Psi_0).
$$

Поэтому либо множитель $(\Psi_0, M\Psi_0)$, либо множитель $(\Psi_0, N\Psi_0)$ должен обращаться в нуль. ∎

Возвращаясь к рассматриваемой модели, предположим, что для некоторого нечетного n величина $(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots \ldots\varphi(x_n)\Psi_0) \neq 0$. Можно, конечно, рассмотреть и другую возможность, но этого случая достаточно для иллюстрации затронутой проблемы. Положим

$$
\begin{aligned}
M &= \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n), \qquad n \text{ — нечетное},\\
N &= \varphi(y_1)\ldots\varphi(y_j)\psi_1(y_{j+1})\ldots\psi_1(y_{j+k})\psi_2(y_{j+k+1})\ldots\\
&\qquad \ldots\psi_2(y_{j+k+l}),\ k \text{ — нечетное},\ l \text{ — нечетное},
\end{aligned}
$$

и применим теорему 4-11. Поскольку M и N антикоммутируют, то для всех j получим:

$$
\begin{aligned}
(\Psi_0, \varphi(y_1)\ldots\varphi(y_j)\psi_1(y_{j+1})\ldots\psi_1(y_{j+k})\psi_2(y_{j+k+1})\ldots\\
\ldots\psi_2(y_{j+k+l})\Psi_0) = 0, \quad k \text{ — нечетное},\ l \text{ — нечетное}.
\end{aligned} \quad (4\text{-}56)
$$

Такое выражение также обращается в нуль, если $(k + l)$ нечетно [см. замечание после (4-30)]. Очевидно, что этот факт совместно с (4-56) приводит к тому, что вакуумные средние, а следовательно, и вся теория инвариантны относительно группы из четырех преобразований вида $(\psi_1, \psi_2) \to (\pm\psi_1, \pm\psi_2)$. Эта симметрия приводит к закону сохранения, который мы будем называть *четно-нечетным правилом*.

Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ расщепляется на сумму четырех ортогональных подпространств $\mathscr{H}_{\pm,\pm}$, которые натянуты соответственно на состояния

$$\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_j)\,\psi_1(x_{j+1})\ldots\psi_1(x_{j+k})\,\psi_2(x_{j+k+1})\ldots$$
$$\ldots\psi_2(x_{j+k+l})\,\Psi_0$$

с (k, l) = (четное, четное), (четное, нечетное), (нечетное, четное) и (нечетное, нечетное). Ортогональность этих четырех подпространств гарантируется равенством (4-56), совместно с унивалентным правилом суперотбора. Очевидно, что эти подпространства инвариантны относительно преобразований из группы Пуанкаре.

Определим теперь преобразование Клейна для этого случая. Оно должно оставлять поля ψ_1 и ψ_2 неизменными и заменять поле φ на новое поле φ', определенное как φ на тех векторах области определения φ, которые входят в $\mathscr{H}_{+\pm}$, определенное как $-\varphi$ на тех векторах, которые входят в $\mathscr{H}_{-,\pm}$, и тем самым в силу линейности определенное везде. Нетрудно убедиться в том, что поле φ' эрмитово. Тогда поля φ', $\psi_1{}' = \psi_1$ и $\psi_2{}' = \psi_2$ удовлетворяют нормальным перестановочным соотношениям.

Замечания, аналогичные замечаниям, сделанным по поводу первого примера, остаются и здесь в силе. Но в дополнение здесь появляются такие новые черты. Четно-нечетное правило определяет некий закон сохранения в рассматриваемой системе; определяет ли оно правило суперотбора? Для ответа на подобные вопросы опять нужен анализ наблюдаемых. Новая теория эквивалентна старой в первом обсуждавшемся выше смысле: существует неприводимый набор операторов поля $(\varphi', \psi_1{}', \psi_2{}')$, подчиняющийся нормальным перестановочным соотношениям. Конечно, возможно, что интересующие нас в теории величины можно более «просто» представить в терминах одного набора полей, чем в терминах другого. В этой связи есть резон предпочесть преобразованные поля $(\varphi', \psi_1{}', \psi_2{}')$, так как эрмитовы операторы $\varphi(x)$ и $\psi_1(y)\psi_2(z)+\psi_2(z)\psi_1(y)$ не коммутируют на больших пространственноподобных интервалах. Это неестественно для теории поля и означает, что любая функция полей $(\varphi, \psi_1, \psi_2)$, соответствующая локальному измерению си-

стемы, должна быть довольно сложной функцией старых полей. Она может быть простой функцией новых полей, которые не страдают потерей коммутативности в пространственноподобных точках. Это завершает наше обсуждение второго примера.

Рассмотрим далее случай набора локальных полей с произвольным спином, следуя анализу, проведенному Араки. Главные необходимые шаги состоят в том, чтобы показать, что аномальные перестановочные соотношения приводят к четно-нечетным правилам, и после этого установить, что это позволяет определить необходимые преобразования Клейна. Предположим, что имеются n полей $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и что все компоненты поля φ_j удовлетворяют одним и тем же перестановочным (или антиперестановочным) соотношениям со всеми компонентами поля φ_k. Мы предполагаем, что операторы $\varphi_{j\alpha}{}^*$, сопряженные компонентам $\varphi_{j\alpha}$ поля φ_j, содержатся в числе компонент $\varphi_{k\beta}$. Наше окончательное утверждение содержится в теореме, следующей ниже.

Теорема 4-12

> В любой теории поля с аномальными перестановочными соотношениями всегда существует неприводимый набор полей, удовлетворяющих нормальным перестановочным соотношениям, который может быть получен из первоначального набора полей с помощью преобразования Клейна.

Доказательство довольно сложно и разделяется на ряд стадий. На первой стадии обобщим понятие четно-нечетного правила. Говорят, что в теории имеет место *четно-нечетное правило для набора полей* α, если каждое вакуумное среднее от нечетного числа полей из совокупности α обращается в нуль. В этом случае два пространства $\mathscr{H}_o$ и $\mathscr{H}_e$, полученные действием на вакуум полиномов, которые соответственно четны или нечетны по полям из α (и произвольны по остальным полям), ортогональны друг другу и, очевидно, инвариантны относительно группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Поэтому оператор $p(\alpha)$, определен-

ный как 1 на пространстве $\mathcal{H}_e$ и как -1 на пространстве $\mathcal{H}_o$ и в силу линейности определенный везде, коммутирует с представлением $U(a, \Lambda)$ группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$.

Предположим, что мы определим преобразование Клейна к новым полям как умножение всех полей из другого набора β на оператор $p(\alpha)$

$$\varphi_j' = p(\alpha)\varphi_j,\ \varphi_j \in \beta; \qquad \varphi_j' = \varphi_j,\ \varphi_j \notin \beta. \qquad (4\text{-}57)$$

Тогда φ' — это снова поля, вообще говоря, с различными перестановочными соотношениями. Набор α в (4-57) (или несколько таких наборов) находится по аномальным перестановочным соотношениям, т. е. применением теоремы 4-11. Набор β можно подобрать надлежащим образом так, чтобы перестановочные соотношения приняли бы нормальную форму. В первом примере, приведенном выше, набор α состоял из поля ψ спина 1/2 и четно-нечетное правило было следствием унивалентного правила суперотбора. Во втором примере было два возможных набора α, именно набор, состоящий из поля ψ_1, и набор, состоящий из поля ψ_2. В качестве набора β мы в обоих примерах выбрали набор, состоящий из одного поля φ.

Перестановочные соотношения полей φ_j', φ_k' будут отличны от перестановочных соотношений полей φ_j, φ_k, если одно из полей входит в набор α, а другое — в набор β, и в то же время оба поля не принадлежат сразу обоим наборам. В других случаях соотношения не меняются. Чтобы убедиться в этом, следует рассмотреть по порядку все случаи из возможных шестнадцати в соответствии с тем, относятся или нет поле φ_1 и поле φ_2 к наборам α или β. (Для простоты пока заменим j и k на 1 и 2.) Если ни φ_1, ни φ_2 не относятся к набору β, то $\varphi_1' = \varphi_1$ и $\varphi_2' = \varphi_2$, и потому перестановочные соотношения не меняются. Это имеет место в четырех случаях, обозначаемых $(\varphi_1 \in \alpha, \notin \beta;\ \ \varphi_2 \in \alpha, \notin \beta)$; $(\varphi_1 \notin \alpha, \notin \beta;\ \ \varphi_2 \in \alpha, \notin \beta)$; $(\varphi_1 \in \alpha, \notin \beta; \varphi_2 \notin \alpha, \notin \beta)$; $(\varphi_1 \notin \alpha, \notin \beta; \varphi_2 \notin \alpha, \notin \beta)$. Если ни φ_1, ни φ_2 не относятся к набору α, то оба поля коммутируют с $p(\alpha)$ и перестановочные соотношения не меняются. Это имеет место еще в трех случаях: $(\varphi_1 \notin \alpha, \notin \beta; \varphi_2 \notin \alpha, \in \beta)$; $(\varphi_1 \notin \alpha, \in \beta;\ \varphi_2 \notin \alpha, \in \beta)$ и $(\varphi_1 \notin \alpha, \in \beta; \varphi_2 \notin \alpha, \notin \beta)$. Нетрудно также установить, что если одно из

полей не принадлежит ни к одному из этих наборов, то преобразование Клейна не меняет вида коммутатора. Последнее имеет место для вариантов ($\varphi_1 \notin \alpha, \notin \beta$; $\varphi_2 \in \alpha, \in \beta$) и ($\varphi_1 \in \alpha, \in \beta$; $\varphi_2 \notin \alpha, \notin \beta$). Если оба поля φ_1 и φ_2 принадлежат к обоим наборам, то $\varphi_1'\varphi_2' = p(\alpha)\varphi_1 p(\alpha)\varphi_2 = -p^2(\alpha)\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_1\varphi_2$ и $\varphi_2'\varphi_1' = -\varphi_2\varphi_1$. Поэтому (4-57) в данном случае никак не влияет на поведение $[\varphi_1, \varphi_2]_\pm$. Это имеет место в случае ($\varphi_1 \in \alpha, \in \beta$; $\varphi_2 \in \alpha, \in \beta$). Остальные шесть вариантов удовлетворяют условию, что одно из полей φ_1, φ_2 принадлежит к набору α, а другое — к набору β. Эти варианты таковы: ($\varphi_1 \notin \alpha, \in \beta$; $\varphi_2 \in \alpha, \in \beta$), ($\varphi_1 \in \alpha, \notin \beta$; $\varphi_2 \notin \alpha, \in \beta$), ($\varphi_1 \in \alpha, \notin \beta$; $\varphi_2 \in \alpha, \in \beta$), ($\varphi_1 \in \alpha, \in \beta$; $\varphi_2 \notin \alpha, \in \beta$), ($\varphi_1 \in \alpha, \in \beta$; $\varphi_2 \in \alpha, \notin \beta$), ($\varphi_1 \notin \alpha, \in \beta$; $\varphi_2 \in \alpha, \notin \beta$). Читатели могут сами убедиться в том, что в этих шести случаях $[\varphi_1, \varphi_2]_\pm = 0$ переходит в $[\varphi_1', \varphi_2']_\mp = 0$, если только использовать (4-57) и тот факт, что ежели $\varphi_j \in \alpha$, то $p(\alpha)$ антикоммутирует с φ_j, тогда как если $\varphi_j \notin \alpha$, то $p(\alpha)$ и φ_j коммутируют. Тем самым получен следующий результат: преобразование (4-57) меняет вид перестановочных соотношений, если одно поле входит в набор α, а второе — в набор β и оба поля не входят сразу в оба набора; в других случаях соотношения остаются неизменными.

Поскольку мы хотим преобразовать перестановочные соотношения к нормальному виду, то представляет интерес матрица σ_{ij}, определенная условием:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 0, && \text{если } \varphi_i, \varphi_j \text{ обладают нормальными} \\ & && \text{перестановочными соотношениями,} \\ \sigma_{ij} &= 1 && \text{в противном случае.} \end{aligned} \tag{4-58}$$

Очевидно, что $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. В силу теоремы 4-10 всякое поле всегда обладает нормальными перестановочными соотношениями с самим собой, откуда следует, что $\sigma_{ii} = 0$.

Чтобы определить, имеет ли место четно-нечетное правило, установим перестановочные соотношения между одночленами по полям M, N, ... и введем понятие *нормальных перестановочных соотношений между такими одночленами*. Говорят, что два одночлена M и N обладают «нормальными» перестановочными соотношениями, если они коммутируют (антикоммутируют) так, как если бы все поля в них обладали нормальными перестано-

вочными соотношениями. В противном случае говорят, что эти одночлены обладают «аномальными» перестановочными соотношениями. Два одночлена могут обладать нормальными перестановочными соотношениями, хотя составляющие их поля могут таковыми и не обладать.

Очевидно, что перестановочные соотношения одного одночлена с другим зависят только от четностей показателей степеней входящих в них полей *). Другими словами, два одночлена M_1 и M_2 обладают одинаковыми перестановочными соотношениями с любым другим одночленом, если M_1 и M_2 принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности, определенному следующим образом: *два одночлена эквивалентны, если степени полей каждого сорта в каждом из них обладают одной и той же четностью*. Каждый класс эквивалентности содержит одночлен наименьшей степени, в который данное поле φ_j либо входит один раз, либо не входит вовсе (порядок, в котором перемножаются поля, в данном случае безразличен). Таким образом, существует одно-однозначное соответствие между классами эквивалентности и наборами полей $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_n$. Будем обозначать каждый класс эквивалентности вектором $s = (s_1, \ldots, s_n)$, определенным равенством

$$s_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \text{если } \varphi_j \text{ появляется } \begin{Bmatrix} \text{четное} \\ \text{нечетное} \end{Bmatrix} \text{число раз}$$

в одночленах класса эквивалентности s. Если M — некий одночлен, то мы будем пользоваться символом $s(M)$ для обозначения класса эквивалентности, содержащего M, или вектора, который обозначает этот класс. Произвольному набору полей β можно сопоставить вектор $t(\beta) = (t_1(\beta), \ldots, t_n(\beta))$, который определяется условиями:

$$t_j(\beta) = 0, \quad \text{если} \quad \varphi_j \notin \beta,$$

$$t_j(\beta) = 1, \quad \text{если} \quad \varphi_j \in \beta.$$

Если β — набор полей $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, то очевидно, что $t(\beta)$ — класс эквивалентности, содержащий одночлен $\varphi_1, \ldots \varphi_k$.

---

*) Говорят, что два числа имеют одну и ту же *четность*, если они либо оба четны, либо оба нечетны.

Определим сложение двух векторов s и t в виде

$$(s+t)_j = s_j + t_j (\mathrm{mod}\, 2),$$

т. е. будем пользоваться следующим правилом сложения их компонент: $0+0=1+1=0$; $0+1=1+0=1$. Это правило удобно, поскольку нас интересует только четность рассматриваемых чисел. С таким законом сложения классы эквивалентности $s, \ldots$ образуют векторное пространство V. Нетрудно получить следующие две формулы:

$$\sum_j s_j(M)\, t_j(\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, 2), \tag{4-59}$$

если M содержит $\begin{pmatrix}\text{четное}\\ \text{нечетное}\end{pmatrix}$ число полей из β, а с учетом формулы (4-58)

$$\sum_{i,\, j} s_i(M)\, \sigma_{ij} s_j(N) = \begin{pmatrix} \text{0, если } M, N \text{ обладают нор-} \\ \text{мальными перестановочными} \\ \text{соотношениями, 1 в против-} \\ \text{ном случае} \end{pmatrix}, \tag{4-60}$$

где сумма вновь берется по модулю 2.

Теперь мы запаслись почти всем необходимым для доказательства теоремы. Результат действия преобразования (4-57) на матрицу σ_{ij} можно вычислить в явном виде. Если i и j таковы, что φ_i входит в один из наборов α, β, а φ_j — в другой, то в силу определения $t(\alpha)$, $t(\beta)$

$$\begin{aligned} &\text{либо} \quad t_i(\alpha) = t_j(\beta) = 1, \\ &\text{либо} \quad t_i(\beta) = t_j(\alpha) = 1. \end{aligned} \tag{4-61}$$

Выше мы отмечали, что матрица σ_{ij} изменяется под действием преобразования Клейна (4-57) в том и только в том случае, если справедливо одно и только одно из равенств (4-61). Таким образом, результат действия (4-57) на σ имеет вид

$$\sigma_{ij} \to \sigma_{ij} + t_i(\alpha)\, t_j(\beta) + t_j(\alpha)\, t_i(\beta)\, (\mathrm{mod}\, 2). \tag{4-62}$$

Ниже мы покажем, что σ может быть сведена к нулю последовательным действием преобразований (4-57), предварительно доказав, что σ имеет вид, определяемый нижеследующей теоремой.

Теорема 4-13

Если $\sigma_{ij} = \binom{0}{1}$ и если поля φ_i и φ_j обладают $\binom{\text{нормальными}}{\text{аномальными}}$ перестановочными соотношениями, то

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{N} [t_i(\alpha_k) s_j^{(k)} + s_i^{(k)} t_j(\alpha_k)] (\mathrm{mod}\, 2), \quad (4\text{-}63)$$

где α_k — наборы, обладающие четно-нечетным правилом, а $s^{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$,— некоторые векторы в V.

Доказательство теоремы 4-12

Предположим, что теорема 4-13 верна, и продолжим рассуждения следующим образом. Выберем набор β_k так, чтобы он состоял из полей, входящих в минимальный одночлен в $s^{(k)}$ в минимальной степени по каждому полю (т. е. $s^{(k)} = t(\beta_k)$). Если применить (4-57) N раз, используя α_k и β_k, то матрица σ_{ij} преобразуется в

$$[\sigma_{ij} + \sigma_{ij}] (\mathrm{mod}\, 2) = 0 (\mathrm{mod}\, 2). \blacksquare$$

Доказательство теоремы 4-13

Чтобы доказать теорему 4-13, следует установить критерий для решения вопроса, подчиняется ли данный набор α четно-нечетному закону. Для этого введем подмножество Γ из V, определенное условием: $s \in \Gamma$, если в классе эквивалентности s существует одночлен M такой, что $(\Psi_0, M\Psi_0) \neq 0$. Можно определить $\overline{\Gamma}$ как такое множество векторов, которое получается добавлением к множеству Γ всех сумм векторов из Γ. [Например, если Γ содержит

векторы (0,1) и (1,1), то $\bar{\Gamma}$ содержит векторы (0,1), (1,1) и $(0,1)+(1,1)=(1,0)$.] Множество Γ (или $\bar{\Gamma}$), как сейчас будет показано,— это как раз такое множество, которое желательно иметь для определения четно-нечетных правил в теории.

Наше утверждение состоит в следующем: если

$$\sum_j s_j t_j(\alpha) = 0 \pmod 2 \text{ для всех } s \in \Gamma \tag{4-64}$$

(и, между прочим, тем самым для всех $s \in \bar{\Gamma}$), то для набора α существует четно-нечетное правило. Чтобы доказать это, допустим, если это возможно, что M — одночлен, содержащий нечетное число полей из набора α (и любое число других полей), и этот одночлен таков, что $(\Psi_0, M\Psi_0) \neq 0$. Пусть $s(M)$ — класс эквивалентности для M. По определению Γ, $s(M) \in \Gamma$, а в силу (4-59) $\sum s_j(M) t_j(\alpha) = 1 \pmod 2$, что противоречит этому свойству.

Далее можно утверждать, что если $s(M)$ и $s(N)$ — два вектора из Γ, то M и N обладают нормальными перестановочными соотношениями. Поскольку $(\Psi_0, M\Psi_0) \neq 0$, $(\Psi_0, N\Psi_0) \neq 0$, то тогда M и N должны коммутировать, чтобы избежать противоречия с теоремой 4-11. Оба одночлена, и M и N, содержат четное число полей полуцелого спина, и поэтому, если мы предположим, что все поля φ_j обладают нормальными перестановочными соотношениями, то M и N будут коммутировать. Тем самым одночлены M и N обладают нормальными перестановочными соотношениями. Эквивалентом этого утверждения согласно (4-60) оказывается условие

$$\sum_{i,j} s(M)_i \, \sigma_{ij} s(N)_j = 0, \quad \text{если} \quad s(M),\ s(N) \in \Gamma, \tag{4-65}$$

которое играет важную роль в дальнейшем. Этим завершается предварительное обсуждение, и мы возвращаемся к собственно доказательству.

Допустим, что $e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}$ — линейно независимый набор векторов, на который натянуто Γ, а $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ — базис в пространстве V, который включает $e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}$.

Всегда можно найти некий (дуальный) линейно независимый набор $d^{(k)}$ такой, что

$$(e^{(j)}, d^{(k)}) = \sum_i e_i^{(j)} d_i^{(k)} = \delta_{jk} (\mathrm{mod}\, 2). \tag{4-66}$$

Здесь мы пользуемся естественным определением скалярного произведения в V:

$$(s, t) = \sum_{i=1}^{n} s_i t_i (\mathrm{mod}\, 2).$$

Заметим, что это скалярное произведение неположительно определенно, так что взаимная ортогональность векторов набора не обеспечивает их линейной независимости. Например, $((1,1),\ (1,1)) = 1 + 1 = 0$, и поэтому вектор $(1,1)$ ортогонален сам себе. Однако отсутствие положительной определенности не препятствует нахождению $d^{(k)}$.

Можно рассматривать σ как оператор в V: $s \to \sigma s$, определяемый согласно

$$(\sigma s)_j = \sum_i \sigma_{ij} s_i (\mathrm{mod}\, 2).$$

Обозначим матричные элементы σ в новой системе координат $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ через

$$\sigma'_{ij} = (e^{(i)}, \sigma e^{(j)}). \tag{4-67}$$

Тогда

$$(t, \sigma s) = \sum_{i,k} (t, d^{(i)}) \sigma'_{ik} (d^{(k)}, s), \quad s, t \in \mathsf{V}. \tag{4-68}$$

Известно, что любой одночлен имеет нормальные перестановочные соотношения с самим собой. Применим это утверждение к одночленам, определенным векторами $e^{(i)}$, и затем, пользуясь (4-60), получим, что $\sigma'_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Из этого определения нетрудно установить, что

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}.$$

Поскольку векторы $e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}$ принадлежат к Γ, то вследствие (4-65) $\sigma'_{ik} = 0$, если $i, k \leqslant m$. Поэтому

$$\sigma_{ij} = \sum_{k>m} (d_i^{(k)} s_j^{(k)} + s_i^{(k)} d_j^{(k)}),$$

где

$$s^{(k)} = \sum_{i<k} \sigma'_{ik}\, d^{(i)}.$$

Докажем теперь, что векторы $d^{(k)}$ определяют наборы α_k с четно-нечетным правилом, если $k > m$. Допустим, что α_k состоят из тех полей, которые входят в одночлен в классе эквивалентности, определенном с помощью $d^{(k)}$, минимальной степени по каждому из полей, т. е.

$$d^{(k)} = t(\alpha_k) \text{ или } \varphi_j \in \alpha_k, \quad \text{если} \quad d_j^{(k)} = 1,$$

$$\varphi_j \notin \alpha_k, \quad \text{если} \quad d_j^{(k)} = 0.$$

Тогда если $k > m$, то $(d^{(k)}, e^{(j)}) = 0$ для $j \leqslant m$, что дает $\sum_i d_i^{(k)} s_i = 0 \pmod 2$ для всех $s \in \Gamma$, так как на $e^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m$, натянуто пространство Γ. Тем самым в силу (4-64) набор α_k определяет четно-нечетное правило. ∎

Возвратимся теперь к обсуждению теоремы PCT, доказанной в предыдущем параграфе для любой теории с нормальными перестановочными соотношениями. Какова ситуация, когда перестановочные соотношения аномальны? Простейший путь получения ответа на этот вопрос состоит в том, чтобы воспользоваться существованием в силу теоремы 4-12 преобразования Клейна от заданных полей φ_i к полям φ_i', удовлетворяющим нормальным перестановочным соотношениям.

Применив к новым полям φ_i' теорему PCT, можно убедиться в том, что в теории существует оператор симметрии Θ, для которого

$$\Theta\varphi_i'(f)\,\Theta^{-1} = (-1)^j \binom{i}{1} \varphi_i^{*\prime}(\hat{f}),$$

$$\Theta\Psi_0 = \Psi_0, \tag{4-69}$$

где верхний случай в (4-69) относится к полям с полуцелым спином, а нижний — к полям с целым спином. В (4-69) $\hat{f}(x) = \bar{f}(-x)$. Это преобразование индуцирует преобразование первоначальных полей φ_i, которое, вообще говоря, *не будет* иметь вида (4-69) с опущенными

штрихами. Чтобы увидеть, как это происходит, рассмотрим третий пример.

Пример. 3. Антикоммутирующие эрмитовы скалярные поля

Пусть φ и ψ — два антикоммутирующих эрмитовых скалярных поля таких, что

$$(\Psi_0, \varphi(x)\psi(y)\Psi_0) \neq 0.$$

Из теоремы 4-11 следует, что все вакуумные средние, содержащие нечетное число полей, обращаются в нуль. В этом случае можно определить преобразование Клейна, положив $\varphi' = \varphi$, $\psi' = \psi$ на подпространстве, натянутом на векторы, образованные действием на вакуум четных полиномов по размазанным полям, и положив $\varphi' = -\varphi$, $\psi' = \psi$ на подпространстве, натянутом на векторы, образованные действием на вакуум нечетных полиномов по таким полям. Тогда $(\varphi\psi\Psi_0, \Psi_0) = (\psi\Psi_0, \varphi\Psi_0)$, т. е.

$$-(\varphi'\psi'\Psi_0, \Psi_0) = (\psi'\Psi_0, \varphi'\Psi_0),$$

поэтому $(\varphi')^* = -\varphi'$, т. е. преобразование Клейна может перевести эрмитово поле в неэрмитово.

Итак, вообще говоря, мы получим равенство $(\varphi'_i)^* = \pm(\varphi_i^*)'$, комбинируя которое с (4-69), приходим к закону преобразования полей φ_i, отличающемуся от обычного переменой знака для некоторых полей. Интерпретацию Θ как оператора преобразования PCT можно произвести точно так же, как и в нормальном случае, рассмотренном в конце предыдущего раздела. Остается показать, что *частицы* в этой теории подчиняются «нормальной» статистике. Это можно сделать, воспользовавшись асимптотическим условием, доказанным в [6]. Состояние, содержащее несколько ин-частиц, может быть получено путем перехода к пределу $t \to -\infty$ (в сильном смысле) из состояния Ψ_t, отмеченного временным параметром. Состояние Ψ_t может быть порождено из вакуума действием одночлена по полям, подвергшимся преобразованию Клейна. Поскольку эти поля удовлетворяют нормальным перестановочным соотношениям, то частицы в Ψ_t подчиняются нормальной статистике при конечных временах, а тем самым и асимптотически.

4-5. ТЕОРЕМА ХААГА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Мы уже отмечали в разделе 3-1, что в традиционной формулировке теории поля предполагается, что операторы неприводимого набора удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям в заданный момент времени. В этом параграфе мы последуем традиции и проследим дальнейшие следствия этой идеи.

Для систем с конечным числом степеней свободы можно доказать, что при определенных условиях любые два представления перестановочных соотношений связаны каноническим (унитарным) преобразованием. Если бы этот результат можно было перенести в теорию поля, то мы могли бы определить так называемую *картину взаимодействия*. В этом случае канонические переменные в каждый момент времени предполагаются эквивалентными каноническим переменным свободного поля φ_{int}. В частности,

$$V(t)\,\varphi(\mathbf{x}, t)\,V^{-1}(t) = \varphi_{\text{int}}(\mathbf{x}, t). \tag{4-70}$$

Зависимость от времени оператора V отражает наличие взаимодействия, и различные интересующие нас величины могут быть получены из него. Например, оператор рассеяния S определяется так:

$$S = \lim_{t\to\infty} V(t)\,V(-t)^*.$$

Вскоре, однако, выяснилось, что рассуждения, ведущие к (4-70), неубедительны, поскольку существует много неэквивалентных представлений канонических перестановочных соотношений [т. е. представлений, которые не могут быть связаны посредством унитарного преобразования (4-70)]. Однако эти рассуждения не только неубедительны, но и *неверны:* за исключением случая, когда $\varphi(\mathbf{x}, t)$ — свободное поле, не существует никаких операторов V, удовлетворяющих (4-70), как это будет продемонстрировано ниже с помощью аргументов, воплощающих идеи Р. Хаага.

Очевидно, чтобы эта теорема имела смысл, необходимо предположить существование полей, которые для каждого значения своих временных аргументов были бы

обобщенными функциями своих пространственных аргументов.

Первый шаг состоит в том, чтобы показать, что унитарная эквивалентность двух неприводимых наборов операторов приводит к равенству вакуумных средних операторов, взятых в один и тот же момент времени.

Теорема 4-14

Пусть $\varphi_{1\alpha}(f, t)$ и $\varphi_{2\beta}(f, t)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ — любые два неприводимых набора операторов поля в момент времени t, определенных соответственно в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, в которых существуют непрерывные унитарные представления неоднородной группы SU_2

$$\{\mathbf{a}, A\} \to U_j(\mathbf{a}, A), \qquad j = 1, 2,$$

соответственно такие, что

$$U_j(\mathbf{a}, A)\varphi_{j\alpha}(f, t)U_j(\mathbf{a}, A)^{-1} = \\ = \sum_\beta S_{\alpha\beta}(A^{-1})\varphi_{j\beta}(\{\mathbf{a}, A\}f, t), \qquad (4\text{-}71)$$

где $A \to S(A)$ — матричное представление унитарной унимодулярной группы SU_2. Предположим, что представления U_j обладают единственными инвариантными состояниями Ψ_{j0}, т. е.

$$U_j(\mathbf{a}, A)\Psi_{j0} = \Psi_{j0}, \qquad j = 1, 2. \qquad (4\text{-}72)$$

Наконец, предположим, что существует унитарный оператор V такой, что в момент времени t

$$\varphi_{2\alpha}(f, t) = V\varphi_{1\alpha}(f, t)V^{-1}. \qquad (4\text{-}73)$$

Тогда

$$U_2(\mathbf{a}, A) = VU_1(\mathbf{a}, A)V^{-1} \qquad (4\text{-}74)$$

и

$$c\Psi_{20} = V\Psi_{10}, \qquad (4\text{-}75)$$

где c — комплексное число, равное по модулю единице.

Доказательством этой теоремы может служить слегка модифицированный вариант доказательства теоремы 3-8. Нужно рассмотреть оператор $U_2(\mathbf{a}, A)^{-1} V U_1(\mathbf{a}, A) V^{-1}$ и показать, что он с точностью до постоянной совпадает с единичным оператором в $\mathscr{H}_2$. Подробности доказательства могут восстановить сами читатели. Из соотношений (4-73) и (4-75) немедленно вытекает интересное следствие.

Следствие

В любых двух теориях, удовлетворяющих предположениям теоремы 4-14, вакуумные средние операторов, зависящих от одного и того же момента времени, совпадают:

$$(\Psi_{10}, \varphi_{1\alpha}(\mathbf{x}_1, t) \ldots \varphi_{1\beta}(\mathbf{x}_n, t) \Psi_{10}) = \\ = (\Psi_{20}, \varphi_{2\alpha}(\mathbf{x}_1, t) \ldots \varphi_{2\beta}(\mathbf{x}_n, t) \Psi_{20}). \quad (4\text{-}76)$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему Хаага, которая гласит, что если одно из двух полей, рассматриваемых в теореме 4-14, свободное, то второе поле также оказывается свободным. Доказательство теоремы просто следует из более общего результата Р. Йоста и Б. Шроера, поэтому мы сначала получим его. Для простоты ограничимся случаем нейтрального скалярного поля, хотя этот результат справедлив и в более общем случае.

Теорема 4-15

Если $\varphi(x)$ — эрмитово скалярное локальное поле, для которого вакуум цикличен, и если

$$(\Psi_0, \varphi(x) \varphi(y) \Psi_0) = \frac{1}{i} \Delta^+(x - y; m) \quad (4\text{-}77)$$

с $m > 0$, то $\varphi(x)$ — свободное поле массы m.

Доказательство

Если ввести $j(x) = (\Box_x + m^2) \varphi(x)$, то из (4-77) нетрудно видеть [используя $(\Box_x + m^2) \Delta^+(x; m) = 0$], что $(\Psi_0, j(x) j(y) \Psi_0)$ обращается в нуль. Отсюда следует

$\|j(f)\Psi_0\| = 0$, что приводит в силу теоремы (4-3) к $j(x) = 0$, т. е. к $(\Box_x + m^2)\varphi(x) = 0$. Тем самым поле φ удовлетворяет уравнению свободного поля. Нам предстоит показать, что это поле свободно в смысле раздела 3-2. Главная часть доказательства состоит в установлении того, что коммутатор для такого поля кратен единичному оператору.

В импульсном пространстве имеем $(p^2 - m^2)\widetilde{\varphi}(p) = 0$, поэтому спектр $\widetilde{\varphi}$ принадлежит к гиперболоиду $p^2 = m^2$. Следовательно, можно разложить φ на положительно и отрицательно частотные части релятивистски инвариантным образом

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x).$$

Например, $\varphi_+(h)$ определен для основной функции h такой, что

$$\varphi_+(h) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{\theta}\widetilde{h}),$$

где $\widetilde{\theta}$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 0 при $p^2 = m^2, p_0 < 0$ и равная 1 при $p^2 > 0$, $p_0 > 0$. Поскольку отрицательные энергии (положительные частоты) не существуют, то

$$\varphi_+(f)\Psi_0 = 0. \tag{4-78}$$

Далее рассмотрим состояние

$$\varphi_+(x)\varphi_-(y)\Psi_0. \tag{4-79}$$

Любой импульс в этом состоянии представляет собой сумму двух времениподобных векторов, направленных в будущее и прошлое, причем каждый из них соответствует массе m. Поэтому такой импульс либо пространственноподобен, либо равен нулю. Поскольку никаких состояний с пространственноподобными импульсами не существует, то состояние вида (4-79) должно быть кратно Ψ_0. Однако из (4-78) следует, что

$$(\Psi_0, \varphi_+(x)\varphi_-(y)\Psi_0) = (\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = \frac{1}{i}\Delta^+(x-y).$$

Таким образом,

$$\varphi_+(x)\varphi_-(y)\Psi_0 = \frac{1}{i}\Delta^+(x-y)\Psi_0 \tag{4-80}$$

и

$$\frac{1}{i}\Delta^{+}(x-y)\Psi_0=[\varphi_{+}(x),\varphi_{-}(y)]\Psi_0. \qquad (4\text{-}81)$$

Комбинируя (4-81) с тривиальным равенством

$$[\varphi_{+}(x),\varphi_{+}(y)]\Psi_0=0,$$

получим:

$$[\varphi(x),\varphi(y)]\Psi_0=\frac{1}{i}\Delta(x-y)\Psi_0+[\varphi_{-}(x),\varphi_{-}(y)]\Psi_0, \quad (4\text{-}82)$$

где

$$\Delta=\Delta^{+}+\overline{\Delta}^{+}.$$

Пусть Ψ — произвольное состояние из области определения φ; определим

$$F(x,y)=(\Psi,[\varphi_{-}(x),\varphi_{-}(y)]\Psi_0).$$

В силу соображений, приведенных при доказательстве теоремы 4-2, $F(x,y)$ представляет собой обобщенную функцию умеренного роста. Ее фурье-образ равен нулю *), если только импульсы, сопряженные x и y, лежат в будущем световом конусе. Поэтому в силу теорем 2-6 и 2-7 функция $F(x,y)$ обладает аналитическим продолжением $\mathbf{F}$ в трубу $\operatorname{Im} x$, $\operatorname{Im} y \in V_{+}$. Нетрудно видеть, что $F(x,y)$ обращается в нуль, если x и y вещественны, а $(x-y)^2<0$. Последнее можно получить из (4-82), заметив, что если $(x-y)^2<0$, то $\frac{1}{i}\Delta(x-y)=0$ и $[\varphi(x),\varphi(y)]=0$. Тем самым в силу аналитического продолжения (теорема 2-17) $\mathbf{F}(x,y)=0$ в точках голоморфности, и поэтому ее гранич-

*) В этом рассуждении и в нескольких других местах последней части доказательства мы имеем дело с неразмазанными полями. Это вопрос чистого удобства. Необходимое размазывание могут легко произвести сами читатели. Например, вместо того чтобы иметь дело с (4-79), можно рассмотреть обобщенную функцию умеренного роста T на $\mathbf{R}^8$, определенную равенством

$$(\Psi_0,\ \varphi_{+}(f)\varphi_{-}(g)\Psi_0)=T(f,\ g),$$

и убедиться в том, что ее фурье-образ $\widetilde{T}(p_1,\ p_2)$ равен нулю всегда, кроме случая $p_1^2=m^2$, $p_1^0>0$, $p_2^2=m^2$, $p_2^0<0$. Таким образом, по переменной (p_1+p_2) носитель этой функции состоит из векторов, которые либо пространственноподобны, либо равны нулю. Отсюда следуют те же выводы, что и выше.

ное значение F обращается в нуль. Следовательно,

$$[\varphi(x), \varphi(y)]\,\Psi_0 = \frac{1}{i}\Delta(x-y)\,\Psi_0. \tag{4.83}$$

Из (4-83) следует, что оператор $[\varphi(x), \varphi(y)] - 1/i\Delta(x-y)$, размазанный должным образом, при действии на вакуум дает нуль и поэтому сам равен нулю, ибо в силу теоремы 4-3 никакой оператор уничтожения не может быть сконструирован из операторов поля, заданных в конечной области.

В обычной формулировке теории поля свободное скалярное поле общепринято определять как оператор, удовлетворяющий (4-78) и условиям:

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0, \qquad [\varphi(x), \varphi(y)] = \frac{1}{i}\Delta(x-y), \tag{4-84}$$

так что в этом смысле данная теорема уже доказана. Однако нетрудно также проверить, что из уравнений (4-84) следует определение свободного поля, данное нами выше. Для этого достаточно показать, что вакуумные средние таких полей совпадают с теми, которые даются формулой (3-41). Из (4-84) немедленно следует, что

$$[\varphi_+(x_1), \varphi(x_j)] = \frac{1}{i}\Delta^+(x_1 - x_j),$$

и поэтому

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) &= (\Psi_0, \varphi_+(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, [\varphi_+(x_1), \varphi(x_2)]\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) + \\ &+ (\Psi_0, \varphi(x_2)[\varphi_+(x_1), \varphi(x_3)]\varphi(x_4)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) + \ldots \\ &\ldots + (\Psi_0, \varphi(x_2)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_{n-1})[\varphi_+(x_1), \varphi(x_n)]\Psi_0),\end{aligned}$$

где было использовано, что $\varphi_+(x_1)\Psi_0 = 0$.

Отсюда

$$\mathcal{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{i}\Delta^+(x_1 - x_j)\,\mathcal{W}_{n-2}(x_2, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n),$$

где символ $\hat{x}_j$ означает, что x_j опущен. Исходя из двухточечной функции, можно получить формулу (3-41) для вакуумных средних свободного поля. Обращаясь к теореме реконструкции, убеждаемся, что $\varphi(x)$ — свободное поле, определенное в разделе 3-2. ∎

Из теоремы 4-15 следует

Теорема 4-16 (*Теорема Хаага*)

Предположим, что $\varphi_1(x)$ — свободное эрмитово скалярное поле массы $m > 0$, а $\varphi_2(x)$ — локальное поле, ковариантное относительно неоднородной группы $SL(2, C)$. Предположим далее, что поля $\varphi_1(x)$, $\dot{\varphi}_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dot{\varphi}_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4-14. Тогда $\varphi_2(x)$ — свободное поле массы m.

Доказательство

В силу следствия из теоремы 4-14 имеем:

$$(\Psi_{20}, \varphi_2(\mathbf{x}, t)\varphi_2(\mathbf{y}, t)\Psi_{20}) = \frac{1}{i}\Delta^+(\mathbf{x}-\mathbf{y}, 0; m). \tag{4-85}$$

Любые два вектора $(\mathbf{x}, t_1)$ и $(\mathbf{y}, t_2)$ могут быть посредством ограниченного преобразования Лоренца перенесены на гиперплоскость $t_1 = t_2$, если разность между ними пространственноподобна. Тем самым, объединяя известное свойство ковариантности φ_2 с (4-85), можно получить с помощью стандартного рассуждения аналитического продолжения

$$(\Psi_{20}, \varphi_2(\mathbf{x}, t_1)\varphi_2(\mathbf{y}, t_2)\Psi_{20}) = \frac{1}{i}\Delta^+(\mathbf{x}-\mathbf{y}; m).$$

В этом случае теорема Хаага представляет собой прямое следствие теоремы 4-15. ∎

Выводы из теоремы Хаага весьма удручающи. Она означает, что представление взаимодействия существует только, если всякое взаимодействие отсутствует.

Пользуясь той же техникой, можно доказать более общее утверждение, относящееся к любым двум полям, которые унитарно эквивалентны в заданный момент времени. Этот результат известен под названием *обобщенной теоремы Хаага.*

Теорема 4-17

Допустим, что даны две теории поля, удовлетворяющие условиям теоремы 4-14, и предположим дополнительно, что эти теории инвариантны относительно неоднородной группы $SL(2, C)$ и что некоторые из операторов $\varphi_{j\alpha}$ преобразуются под действием $SL(2, C)$ согласно формуле

$$U_j(a, A)\varphi_{j\alpha}(x)U_j^{-1}(a, A) = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}(A^{-1})\varphi_{j\beta}(Ax + a). \quad (4\text{-}86)$$

Тогда вакуумные средние, в которые входят до четырех операторов таких полей включительно, в обеих теориях совпадают.

Замечание

Содержание теоремы 4-17 позволяет применять ее в обычном случае, когда базисные поля ковариантны относительно неоднородной группы $SL(2, C)$, а соответствующие им нековариантные канонически сопряженные импульсы необходимы для образования неприводимого набора операторов в заданный момент времени.

Доказательство

Допустим, что $\mathbf{W}^{(n)}_{j\alpha\ldots\beta}(\zeta_1 \ldots, \zeta_{n-1})$, $j = 1, 2,$ — голоморфные функции, граничные значения которых равны левой (соответственно правой) частям равенства (4-76), причем поля φ выбираются из тех полей, которые удовлетворяют (4-86). Точки, в которых справедливо равенство (4-76), — это полностью пространственноподобные

точки и среди них содержатся точки Йоста*). Чтобы доказать эту теорему, достаточно показать, что эти точки Йоста совместно с теми точками, которые получаются из них посредством преобразований из вещественной группы Лоренца, образуют вещественную окрестность для голоморфных функций $W^{(n)}_{j\alpha\ldots\beta}$ с $n = 2, 3, 4$. (При $n = 1$ вся задача тривиальна.) Для $n = 2$ соответствующие соображения были приведены после формулы (4-85) в доказательстве предыдущей теоремы: любой пространственноподобный вектор ξ может быть приведен к виду $\xi_0 = 0$ с помощью преобразований из вещественной ограниченной группы Лоренца. Для $n = 3$ любые два вещественных пространственноподобных вектора ξ_1, ξ_2 могут быть перенесены на плоскость равных времен $\xi_1{}^0 = \xi_2{}^0 = 0$ с помощью преобразований из вещественной ограниченной группы Лоренца при условии, что двумерная плоскость, которая на них натягивается, состоит только из пространственноподобных векторов (если же эти два вектора коллинеарны, то можно применить соображения, применяемые в случае $n = 2$). Критерием последнего является просто

$$|\xi_1 \cdot \xi_2| < \sqrt{\xi_1{}^2 \xi_2{}^2}, \qquad \xi_1{}^2 < 0, \qquad \xi_2{}^2 < 0, \tag{4-87}$$

что, конечно, выполняется для открытого множества вещественных точек Йоста. Наконец, в случае $n = 4$ любые три вещественных пространственноподобных вектора ξ_1, ξ_2, ξ_3 могут быть перенесены в гиперплоскость равных времен $\xi_1{}^0 = \xi_2{}^0 = \xi_3{}^0 = 0$ с помощью преобразований из вещественной ограниченной группы Лоренца при условии, что гиперплоскость, которая на них натягивается, полностью состоит из пространственноподобных векторов. Критерием последнего является отрицательная определенность матрицы

$$\left\{ \begin{matrix} \xi_1{}^2 & \xi_1 \cdot \xi_2 & \xi_1 \cdot \xi_3 \\ \xi_2 \cdot \xi_1 & \xi_2{}^2 & \xi_2 \cdot \xi_3 \\ \xi_3 \cdot \xi_1 & \xi_3 \cdot \xi_2 & \xi_3{}^2 \end{matrix} \right\}, \tag{4-88}$$

что для открытого множества точек Йоста опять имеет место. ▌

---

*) См. теорему 2-12.

В теореме 4-17 невозможно доказать тем же методом равенство вакуумных средних в двух теориях для пяти и более операторов, поскольку четыре и более векторов нельзя перенести на гиперплоскость равных времен, если только они не входят в специальный набор, а этого слишком мало для обеспечения единственности аналитического продолжения определенных на ней функций. Однако теорема достаточно мощна: если в двух теориях поля вакуумные средние произведений двух, трех или четырех операторов поля должны быть отличны друг от друга, то следует пользоваться неэквивалентными представлениями канонических перестановочных соотношений.

Мы убеждены, что в силу теорем, доказанных в этом разделе, связь между свободным и взаимодействующим полями не может быть столь простой, какой ее можно было бы представить по аналогии с системами с конечным числом степеней свободы. В частности, кинематика оказывается смешанной с динамикой в том смысле, что именно динамика определяет, какое представление канонических перестановочных соотношений следует использовать. В физически интересных квантовых теориях поля еще более вероятна ситуация, в которой одновременные перестановочные соотношения вообще не имеют никакого смысла; поле не может быть оператором, если его не размазать по времени так же, как и по пространству.

Упоминая эти удручающие теоремы, мы не ставили себе целью убедить кого-либо в том, что, по нашему мнению, не может быть придан какой-либо смысл уравнениям движения типа

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = \lambda\varphi^3(x) \tag{4-89}$$

и что изучение их — пустая трата времени. Результаты этой главы просто проясняют некоторые факты из жизни, которые следует иметь в виду при интерпретации таких уравнений. В каком-то смысле все теоремы этой главы можно рассматривать как приготовление к бою: мы перепоясали чресла, готовясь изучать такие вещи, как уравнение (4-89). Чтобы показать, что это уравнение имеет решение, следует найти путь к определению оператора $\varphi^3(x)$, а чтобы сделать это, необходимо иметь хоть какую-нибудь идею насчет того, что же представляет собой поле $\varphi(x)$.

4-6. КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ (КЛАССЫ БОРХЕРСА)

К понятию классов эквивалентности локальных полей можно прийти несколькими путями. Наиболее прямой путь состоит в следующем. Пусть φ_1 — эрмитово скалярное поле с циклическим вакуумным состоянием. Предположим, что φ_2 и φ_3 — два других поля, относящихся к тому же представлению группы Пуанкаре, что и поле φ_1. Допустим, что поля φ_2 и φ_3 не обязательно локальны сами, но вместо этого *взаимно локальны с* φ_1. Это означает, что

$$\begin{aligned} &[\varphi_1(x),\, \varphi_2(p)]_- = 0, \\ &[\varphi_1(x), \varphi_3(y)]_- = 0 \quad \text{для} \quad (x-y)^2 < 0. \end{aligned} \tag{4-90}$$

Что же в этом случае можно сказать о связи φ_2 с φ_3? Борхерс установил, что они также взаимно локальны:

$$[\varphi_2(x), \varphi_3(y)]_- = 0 \quad \text{для} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{4-91}$$

Отсюда непосредственно следует, что они локальны (положите $\varphi_2 = \varphi_3$). Таким образом, взаимно локальные поля распадаются на классы эквивалентности *).

Главная цель этого раздела состоит в доказательстве этих результатов и аналогичных им, исходя из условия слабой локальной коммутативности. Однако прежде чем к этому перейти, хотелось бы высказать некоторые соображения относительно их смысла.

Что это за поля, которые входят в данный класс эквивалентности? В разделе 3-2 было введено понятие полинома Вика по свободному полю. Можно показать, что полином

*) Сначала следует отметить, что существо доказанного сводится к тому, что если для локального поля φ_1 вакуум — циклический вектор, откуда следует, что поле φ_1 неприводимо, то из (4-90) следует (4-91). Поля φ_2, φ_3 необязательно должны быть неприводимы. Далее согласно обычному математическому определению эквивалентности все элементы класса эквивалентности должны входить в него на равных основаниях. Поэтому, строго говоря, *неприводимые* взаимно локальные поля образуют классы эквивалентности. В дальнейшем понятием класса эквивалентности мы будем пользоваться несколько небрежно, включая в класс эквивалентности наряду с неприводимыми и приводимые взаимно локальные поля.

Вика по данному свободному полю исчерпывает класс эквивалентности этого свободного поля (см. [27]). Весьма вероятно, что и в случае полей, не являющихся свободными, соотношение между полями, принадлежащими к одному и тому же классу эквивалентности, будут несколько напоминать соотношения между полиномами Вика. Именно, они могут оказаться локальными функциями друг друга. Примером последнего могут служить поля $\varphi(x)$ и $\varphi(x)+(\Box_x+m^2)\varphi(x)$. Сейчас проводится интенсивное исследование точного смысла, который может быть вложен в утверждение, что одно поле есть локальная функция другого, но эта идея еще едва принимает определенную форму. Вопрос этот тесно связан с теорией алгебр открытых множеств фон Неймана, которой мы коснулись в конце раздела 4-2.

Физическое содержание соотношений эквивалентности, возникающих из взаимной локальной коммутативности, таково: две теории поля, имеющие одно и то же гильбертово пространство $\mathcal{H}$, один и тот же закон преобразования U и взаимно локальные поля, обладают одной и той же S-матрицей. Доказательство этого утверждения опирается на теорию Хаага — Рюэля и потому выходит за рамки этой книги. Тем не менее в силу его важности нам хотелось бы высказать некоторые соображения о направлении, в котором развиваются рассуждения, и в то же время показать, насколько практически важна может быть эквивалентность. Рассмотрим теорию протонов, нейтронов и π-мезонов, $\pi^\pm$ и π^0, которая уже обсуждалась в конце раздела 4-2, причем будем считать, что операторы протонного и нейтронного полей ψ_p, ψ_n вместе с сопряженными им величинами образуют неприводимый набор операторов. В теории Хаага и Рюэля употребляют состояния $Q_\alpha(t)\Psi_0$, где $Q_\alpha(t)$ — соответствующим образом размазанный полином по этим полям, причем

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|Q_\alpha(t)\Psi_0-\Psi_\alpha^{\substack{\text{out}\\ \text{in}}}\|=0,$$

где $\Psi_\alpha^{\substack{\text{out}\\ \text{in}}}$ — состояния рассеяния нейтронов, протонов и π-мезонов. В этой теории существует другой неприводи-

мый набор операторов, состоящий из ψ_n, φ^+ и сопряженных им величин, который может порождать все те же состояния. Эти поля с точки зрения теории Хаага — Рюэля также могут быть использованы для получения состояний рассеяния. Согласно теории Рюэля, если поля ψ_p, ψ_n, φ^+, φ^-, φ^0 сами локальны и взаимно локальны друг относительно друга, то состояния рассеяния, определенные в терминах одного неприводимого набора ψ_p, ψ_n, совпадают с состояниями рассеяния, определенными в терминах другого такого набора ψ_n, φ^+. Отсюда следует, что какой бы набор операторов ни использовался для определения асимптотических состояний, S-матрица будет одна и та же.

Чтобы получить дальнейшее представление о важности классов эквивалентности локальных полей, рассмотрим следующую задачу: классифицировать теории поля с данными $\mathscr{H}$ и U, имеющие разные S-матрицы. (Действительно, эффективное решение этой проблемы было бы, конечно, завершающим достижением общей теории квантованных полей, даже если бы это не привело к расчету ни одного сечения рассеяния.) Предположим, что две теории поля называются *S-эквивалентными*, если они приводят к одной и той же S-матрице. Тогда предшествующее утверждение может быть переформулировано так: две теории поля в одном и том же $\mathscr{H}$, с одним и тем же U и с взаимно локальными полями S-эквивалентны. Таким образом, S-эквивалентные классы составлены из классов Борхерса. Нетрудно видеть, что один и тот же S-эквивалентный класс будет содержать много классов Борхерса. Например, из теории нейтрального скалярного поля φ можно получить новую теорию, заменив φ на $V\varphi V^{-1}$, где V — произвольное унитарное преобразование, коммутирующее с представлением U группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Вообще говоря, поле $V\varphi V^{-1}$ не будет локально относительно φ, но оно приведет к S-эквивалентной теории. Еще неизвестно, все ли теории поля, относящиеся к данному S-эквивалентному классу, могут быть получены из теорий, соответствующих одному классу Борхерса, путем применения всевозможных преобразований V, как указано выше. Однако уже сейчас очевидно, что знание структуры классов Борхерса является существенным предварительным условием любой попытки понять структуру S-эквивалентных классов.

Завершив изложение этих качественных замечаний, приступим теперь к рассмотрению классов эквивалентности. Для простоты будем рассматривать теории, которые можно сформулировать с помощью одного эрмитова скалярного поля. Обобщение на случай произвольного набора спинорных полей производится непосредственно. Вспомним, что поле φ слабо локально, если равенство

$$(\Psi_0, \ \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) = (\Psi_0, \ \varphi(x_n)\ldots\varphi(x_1)\Psi_0) \qquad (4\text{-}92)$$

справедливо для каждого n и каждой точки Йоста $x_1, \ldots, x_n$. В теореме PCT было установлено, что поле φ слабо локально в том и только в том случае, если существует антиунитарный оператор Θ, удовлетворяющий условию

$$\Theta\varphi(f)\Theta^{-1} = \varphi(\hat{f}),$$

где (4-93)

$$\hat{f}(x) = \bar{f}(-x).$$

Поскольку в силу теоремы 4-5 поле φ неприводимо, условие (4-93) определяет оператор Θ с точностью до фазового множителя (доказательство см. в разделе 3-5). Если существует другое неприводимое поле ψ, определенное в том же $\mathscr{H}$ и соответствующее тому же представлению U группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, то у него будет свой оператор PCT, скажем Θ_ψ, тогда и только тогда, когда оно будет слабо локально. Итак, имеются два оператора PCT, именно Θ и Θ_ψ. Вопрос состоит в том, когда они будут совпадать? Из теоремы реконструкции (теорема 3-7) и теоремы 4-7 следует, что если области определения двух полей φ и ψ удовлетворяют некоторым условиям и если φ и ψ *совместно* удовлетворяют условиям СЛК, то $\Theta = \Theta_\psi$. Мы охарактеризуем такую ситуацию утверждением, что эти поля *слабо взаимно локальны друг относительно друга*. В качестве примера теории поля с тремя неприводимыми полями, которые *не являются* слабо взаимно локальными, рассмотрим нетривиальную теорию эрмитова скалярного поля $\varphi(x)$, которому соответствуют асимптотические свободные поля $\varphi^{\text{in}}(x)$, $\varphi^{\text{out}}(x)$, и предположим, что в данной теории спра-

ведлива аксиома асимптотической полноты. Поскольку

$$\Theta\varphi^{\text{in}}(f)\Theta^{-1} = \varphi^{\text{out}}(\hat{f}) \neq \varphi^{\text{in}}(\hat{f}),$$

то оператор PCT для $\varphi(x)$ не совпадает с оператором PCT для полей φ^{in} или φ^{out}. Отсюда a fortiori следует, что поля $\varphi^{\text{in}}(x)$, $\varphi(x)$ и $\varphi^{\text{out}}(x)$ не могут быть взаимно локальны, за исключением случая, когда все эти поля совпадают.

Приведем теперь ряд условий слабой взаимной локальности полей φ и ψ. Эти условия совпадают с набором условий теоремы 4-7. Следует отметить, что ни поле φ, ни поле ψ в этой теореме не предполагаются локальными, т. е. ни одно из них не должно удовлетворять аксиоме III.

Теорема 4-18

Предположим, что $\varphi(x)$ — слабо локальное поле, для которого вакуум является циклическим вектором, и предположим, что $\psi(x)$ — другое поле, преобразующееся согласно тому же представлению группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ и имеющее ту же область определения D. Предположим, что равенство

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_j)\psi(x)\varphi(x_{j+1})\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) = \\ = (\Psi_0, \varphi(x_n)\ldots\varphi(x_{j+1})\psi(x)\varphi(x_j)\ldots\varphi(x_1)\Psi_0) \tag{4-94}$$

справедливо в точках Йоста для всех j и n; тогда

а) $\psi(x)$ слабо локально и

б) $\varphi(x)$, $\psi(x)$ слабо взаимно локальны.

Доказательство

Если Θ — оператор PCT для поля φ, то для любых состояний Φ, $\Psi \in D$ имеет место

$$(\Theta\Phi, \Theta\psi(x)\Theta^{-1}\Theta\Psi) = \overline{(\Phi, \psi(x)\Psi)}. \tag{4-95}$$

Используя инвариантность (4-94) относительно комплексной группы Лоренца, получим, что в точках голоморфности

$$(\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_j)\psi(x)\varphi(x_{j+1}) \ldots \varphi(x_n)\Psi_0) - \\ - (\Psi_0, \varphi(-x_n) \ldots \varphi(-x_{j+1})\psi(-x)\varphi(-x_j) \ldots \\ \ldots \varphi(-x_1)\Psi_0) = 0. \quad (4\text{-}96)$$

Далее обе части (4-96) могут быть продолжены в трубу, определенную условием

$$\mathrm{Im}(x_1 - x_2), \ \ldots, \quad \mathrm{Im}(x_j - x), \quad \mathrm{Im}(x - x_{j+1}), \ldots, \\ \ldots, \mathrm{Im}\,(x_{n-1} - x_n) \in -V_+, \quad (4\text{-}97)$$

и поэтому равенство (4-96) имеет место для всех точек области голоморфности. Перейдя к пределу в трубе (4-97), получим, что (4-96) справедливо для всех вещественных точек. Если

$$\Psi = \varphi(f_j) \ldots \varphi(f_1)\Psi_0, \quad \Phi = \varphi(f_{j+1}) \ldots \varphi(f_n)\Psi_0, \quad (4\text{-}98)$$

то

$$\Theta\Psi = \varphi(\hat{f}_j) \ldots \varphi(\hat{f}_1)\Psi_0, \quad \Theta\Phi = \varphi(\hat{f}_{j+1}) \ldots \varphi(\hat{f}_n)\Psi_0.$$

Используя (4-96), получаем:

$$(\Psi, \psi(x)\Phi) = (\Theta\Phi, \psi(-x)\Theta\Psi),$$

что, после сравнения с (4-95), приводит к равенству

$$\Theta\psi(x)\Theta^{-1} = \psi(-x),$$

справедливому на состояниях вида (4-96). Если использовать эрмитовость ψ, то можно заключить (точно так же как и в рассуждениях в конце раздела 4-1), что это равенство справедливо во всей области D. Тем самым для поля $\psi(x)$ существует оператор PCT [что доказывает пункт а) теоремы], и этот оператор совпадает с оператором PCT для поля $\varphi(x)$ [что доказывает пункт б)].

Теперь мы покажем, что свойство слабой взаимной локальности относительно данного неприводимого поля *транзитивно* в смысле, устанавливаемом следующей теоремой. (Обычное определение транзитивности соотношения $\equiv$ состоит в том, что если $a \equiv b$ и $b \equiv c$, то $a \equiv c$. Такая строгая транзитивность имеет место, если для полей φ_2 и φ_3 вакуум так же является циклическим вектором.)

Теорема 4-19

Предположим, что φ_1—слабо локальное поле, для которого вакуум цикличен, а φ_j, $j = 2, 3$, — слабо взаимно локальные с φ_1 поля, имеющие ту же область определения и отвечающие тому же представлению группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Тогда φ_2 слабо взаимно локально с φ_3.

Доказательство

Из доказательства теоремы 4-18 следует, что поля φ_1 и φ_2 имеют совпадающие операторы PCT, и аналогичное утверждение верно для полей φ_1 и φ_3. Поскольку поле φ_1 неприводимо, этот оператор единствен. Следовательно, φ_2 и φ_3 имеют один и тот же оператор PCT. Тем самым в силу теоремы PCT они слабо взаимно локальны.

Важный результат состоит в том, что для данного слабо локального поля $\varphi(x)$, для которого вакуум цикличен, можно образовать класс эквивалентности, включающий все поля в теории, слабо локальные относительно φ. В этот класс входят все поля с одним и тем же оператором PCT и одинаковой областью определения. Что же касается вопроса об S-эквивалентности полей в этом классе, то на этот счет существует следующее слабое утверждение.

Теорема 4-20

Если $\varphi_1(x)$ слабо локально и вакуум Ψ_0 для него цикличен, $\varphi_2(x)$ слабо взаимно локально с $\varphi_1(x)$ и существуют асимптотические поля такие, что

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \tag{4-99}$$

то имеет место

$$\varphi_1^{\text{out}}(x) = \varphi_2^{\text{out}}(x). \tag{4-100}$$

Доказательство

Поля φ_1 и φ_2 имеют один и тот же оператор PCT. Поэтому если учесть, что оператор Θ преобразует ин-поля в аут-поля, то из (4-99) последует (4-100). ∎

Для локальных полей существуют более сильные результаты, поскольку, как отмечалось выше, (4-99) может быть доказано, исходя из теории Хаага — Рюэля.

Следующая теорема утверждает, что условие взаимной локальности разделяет локальные поля на классы. Это и есть тот результат, значение которого обсуждалось в начале этого раздела.

Теорема 4-21

Предположим, что φ_1, φ_2 и φ_3 имеют одну и ту же область определения и отвечают одному и тому же представлению U группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Предположим, что φ_1 локально и вакуум для него является циклическим вектором и, кроме того,

$$[\varphi_1(x), \varphi_2(y)] = 0 = [\varphi_1(x), \varphi_3(y)],$$
$$\text{если } (x-y)^2 < 0.$$

Тогда

$$[\varphi_2(x), \varphi_3(y)] = 0, \text{ если } (x-y)^2 < 0.$$

Доказательство

Поля φ_1, φ_2 и φ_3 удовлетворяют условиям теоремы 4-18 и потому поля φ_2 и φ_3 слабо локальны сами и слабо взаимно локальны с φ_1. Отсюда следует, что они слабо взаимно локальны. Тем самым в точках Йоста

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_j)\varphi_2(y)\varphi_3(z)\varphi_1(x_{j+1}) \dots \varphi_1(x_n)\Psi_0) =$$
$$= (\Psi_0, \varphi_1(x_n) \dots \varphi_1(x_{j+1})\varphi_3(z)\varphi_2(y)\varphi(x_j) \dots \varphi_1(x_1)\Psi_0) =$$
$$= (\Psi_0, \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_j)\varphi_3(z)\varphi_2(y)\varphi_1(x_{j+1}) \dots \varphi_1(x_n)\Psi_0),$$

поскольку поле φ_1 локально и коммутирует с полями φ_2 и φ_3. Последнее соотношение в точности совпадает с соотношением, обсуждавшимся при доказательстве теоремы 4-1, и, так же как и в том случае, можно заключить, что для всех $x_1, \dots, x_n$

$$(\Psi_0, \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_j)[\varphi_2(y), \varphi_3(z)]\varphi_1(x_{j+1}) \dots \varphi_1(x_n)\Psi_0) = 0,$$
$$\text{если } (y-z)^2 < 0.$$

Поскольку вакуум Ψ_0 цикличен для φ_1, то отсюда следует, что

$[\varphi_2(y), \varphi_3(z)] = 0$, если $(y-z)^2 < 0$, что и требуется.

Следствие

Положив $\varphi_2 = \varphi_3$, можно получить в тех же предположениях: если $\varphi_1(x)$ локально и вакуум Ψ_0 для него цикличен, а φ_2 взаимно локально с φ_1, то φ_2 локально.

Из теоремы 4-21 следует, что относительная локальность является транзитивным свойством.

В качестве применения теорем 4-21 и 4-15 рассмотрим проблему единственности решения уравнения

$$(\Box + m^2)\, u(x) = j(x).$$

Здесь предполагается, что $j(x)$ — заданное неприводимое локальное поле, и проблема состоит в нахождении локального поля u, удовлетворяющего этому уравнению. Предположим, что u_1 и u_2 — два таких поля. Поскольку они оба локальны относительно j, то они взаимно локальны. Тем самым их разность $\varphi = u_1 - u_2$ локальна и удовлетворяет уравнению

$$(\Box + m^2)\, \varphi(x) = 0,$$

т. е. φ с точностью до множителя совпадает со свободным полем. Отсюда хотелось бы сделать вывод, что $\varphi = 0$. Чтобы получить его попроще, введем дополнительную гипотезу. Предположим, что существует свободное поле u_{in}, состояние $u_{\text{in}}(f)\Psi_0$ является одночастичным состоянием Ψ_{1f} и

$$(\Psi_0, u(x)\Psi_{1f}) = (\Psi_0, u_{\text{in}}(x)\Psi_{1f})$$

для всех $f \in \mathcal{S}$. Отсюда следует, что

$$(\Psi_0, [u_1(x) - u_2(x)]\Psi_{1f}) = 0,$$

откуда в свою очередь имеем $\varphi = 0$. Таким образом, возникает

Теорема 4-22

Если j — заданное неприводимое локальное поле и $u(x)$ — локальное решение уравнения

$$(\Box + m^2)\, u(x) = j(x) \tag{4-101}$$

с одночастичным состоянием массы m, то u определяется единственным образом требованием, чтобы

$$(\Psi_0,\ u(x)\, \Psi_{1f}) = \frac{1}{i} \int \Delta^+(x-y)\, dy\, f(y).$$

Есть и другие гипотезы, из которых следует единственность локального решения уравнения (4-101), но мы не будем их здесь рассматривать.

Библиография

Первое доказательство всеобщей природы локальной коммутативности принадлежит Р. Йосту и О. Штейнману и опубликовано в работе

1. A. S. Wightman, Quantum Field Theory and Analytic Functions of Several Complex Variables, J. Indian Math. Soc. 24, 625 (1960).

Значение полиномиальной алгебры $\mathscr{P}(\mathscr{O})$, связанной с областью $\mathscr{O}$ пространства-времени, было впервые обнаружено Р. Хаагом:

2. R. Haag, Discussion des «Axiomes» et des propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locale avec particules composées, в Les problèmes mathematiques de la théorie quantique des champs, CNRS, Paris, 1959. [Есть русский перевод в сб. «Математика» 6 : 4, 134 (1962)].

Тот факт, что вакуум для $\mathscr{P}(\mathscr{O})$ цикличен, был открыт Ри и Шлидером.

3. H. Reeh, S. Schlieder, Bemerkungen zur Unitäräquivalenz von Lorentzinvarianten Feldern, Nuovo cimento 22, 1051 (1961).

Стандартную теорему о разделяющих векторах для алгебр фон Неймана можно найти в книге

4. J. Dixmier, Les algèbres des opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann), Gauthier — Villars, Paris, 1957, p. 6.

Тот факт, что в $\mathscr{P}(\mathscr{O})$ отсутствуют операторы уничтожения, был замечен многими. См., например, ниже [16] или

5. R. J o s t, Properties of Wightman Functions, в Lectures on Field Theory and the Many-Body Problem, E. R. Caianiello (ed.), Academic Press, New York, 1961.

Результат теоремы 4-4 о том, что $\{E_0, \mathscr{P}(\mathscr{O})\}$ неприводимо, содержится в [3]. То, что неприводимость операторов поля следует из цикличности вакуума, доказано в

6. D. R u e l l e, On the Asymptotic Condition in Quantum Field Theory, Helv. Phys. Acta **35**, 147 (1962), Appendix, а также в

7. H. J. B o r c h e r s, On the Structure of the Algebra of Field Operators, Nuovo cimento **24**, 214 (1962). Идея доказательства, приведенного здесь, принадлежит Р. Йосту.

Теорема *PCT* была первоначально предложена Г. Людерсом и Б. Зумино в такой форме: если релятивистская квантовая теория поля обладает симметрией относительно инверсии пространства *P*, то она также должна быть симметричной относительно произведения *CT* операций зарядового сопряжения и обращения времени. В этой форме она доказана в

8. G. L ü d e r s, On the Equivalence of Invariance under Time Reversal and under Particle-Anti-Particle Conjugation for Relativistic Field Theories, Dan. Mat. Fys. Medd. 28, 5 (1954).

Паули был первым, кто понял, что сама операция *PCT* представляет собой симметрию.

9. W. P a u l i, Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflection of Space-Time and Charge, стр. 30 в Niels Bohr and the Development of Physics, W. Pauli (ed.), Pergamon Press, New York, 1955. (Есть русский перевод «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958, стр. 35.)

Доказательство, данное здесь, принадлежит Р. Йосту:

10. R. J o s t, Eine Bemerkung zum *CTP* Theorem, Helv. Phys. Acta **30**, 409 (1957). Эта работа явилась исходным пунктом для многих приложений, приведенных в этой главе. Связь между инвариантностью относительно *PCT* и слабой локальной коммутативностью, введенная выше, обсуждалась далее в

11. F. J. D y s o n, On the Connection of Weak Local Commutativity and Regularity of Wightman Functions, Phys. Rev. **110**, 579 (1958).

Интересно, что в своей работе 1940 года о спине и статистике Паули *в действительности доказал то, что может быть названо «классической» инвариантностью относительно PCT* для рассматривавшихся им теорий свободных полей: им было доказано, что правило подстановки (1-51) оставляет инвариантными уравнения теории, если эти уравнения инвариантны относительно ограниченной группы Лоренца и линейны. Последняя специфическая черта правила подстановки для операции *PCT* в квантовой механике, т. е. перемена порядка, впервые появилась в следующей работе Швингера

12. J. S c h w i n g e r, On the Theory of Quantized Fields I, Phys. Rev. 82, 914 (1951). (Есть русский перевод в сб. «Новейшее

развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 115.) Однако читатели этой работы, вообще говоря, не заметили, что в ней сформулирована или доказана теорема PCT. В случае свободных полей, рассмотренном Паули, никаких произведений операторов не возникает. Поэтому «классическая» инвариантность относительно PCT, которую он доказал для уравнений, совпадает с полной квантовомеханической инвариантностью относительно PCT.

Теорема о спине и статистике имеет длинную историю. В довольно общей форме (произвольный спин, но для свободных полей) она появилась в

13. M. Fierz, Über die relativische Theorie kräftfreier Teilchen mit beliebigem Spin, Helv. Phys. Acta 12, 3 (1939).
14. W. Pauli, On the Connection between Spin and Statistics, Phys. Rev. 58, 716 (1940). (Есть русский перевод в книге: В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947, стр. 72.)

Первые доказательства, использовавшие только общие предположения главы 3, были получены в работах

15. G. Lüders, B. Zumino, Connection between Spin and Statistics, Phys. Rev. 110, 1450 (1958) и
16. N. Burgoyne, On the Connection of Spin with Statistics, Nuovo cimento 8, 807 (1958). Приведенная выше трактовка следует последней работе.

Важный пункт, связанный с теоремой 4-8, впервые был прояснен Дель'Антонио:

17. G. F. Dell'Antonio, On the Connection of Spin with Statistics, Ann. Phys. 16, 153 (1961).

Перестановочные соотношения между разными полями обсуждались в рамках обычной теории несколькими авторами, из которых мы процитируем только

18. G. Lüders, Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern, Z. Naturforsch. 13a, 254 (1958). Людерс был первым, кто систематически использовал векторное пространство V, описанное в тексте. Понятие о преобразовании Клейна, которое использовалось этими авторами, систематически применялось О. Клейном в другом контексте:
19. O. Klein, Quelques remarques sur le traitement approximatif du problème des électrons dans un réseau cristallin par la mécanique quantique, J. Phys. Radium 9, 1 (1938).

Рассмотрение перестановочных соотношений разных полей, проведенное выше, взято из работы Араки.

20. H. Araki, Connection of Spin with Commutation Relations, J. Math. Phys. 2, 267 (1961).

Теорема Хаага первоначально была сформулирована в работе

21. R. Haag, On Quantum Field Theory, Dan. Mat. Fys. Medd. 29, № 12 (1955).

Обобщенная теорема Хаага была первоначально доказана в работе

22. D. Hall, A. S. Wightman, A Theorem on Invariant Analytic Functions with Applications to Relativistic Quantum Field Theory, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **31**, № 5 (1957).

Простое доказательство теоремы 4-15, приведенное здесь, принадлежит Йосту и Шроеру (см. [5]). Другое рассмотрение можно найти в

23. O. W. Greenberg, Haag's Theorem and Clothed Operators, Phys. Rev. **115**, 706 (1959).

Доказательство теоремы Хаага, аналогичное доказательству Йоста и Шроера, было дано Федербушем и Джонсоном

24. P. G. Federbush, K. A. Johnson, The Uniqueness of the Two-Point Function, Phys. Rev. **120**, 1926 (1960).

Классы эквивалентности локальных полей были впервые описаны в работе

25. H. J. Borchers, Über die Mannigfaltigkeit der interpolierenden Felder zu einer kausalen S-Matrix, Nuovo cimento **15**, 784 (1960).

Примеры взаимно локальных полей, соответствующих одной и той же S-матрице, в рамках теории возмущений были найдены Чисхольмом, Саламом и Камефучи. Ссылки на их работы можно найти в

26. S. Kamefuchi, L. O'Raifeartaigh, A. Salam, Change of Variables and Equivalence Theorems in Quantum Field Theories, Nucl. Phys. **28**, 529 (1961).

Класс эквивалентности свободного эрмитова скалярного поля был определен независимо Б. Шроером (не опубликовано) и Г. Эпштейном

27. H. Epstein, On the Borchers Class of a Free Field, Nuovo cimento **27**, 886 (1963).

Литературу о статистиках, отличных от ферми- или бозе-статистик, можно почерпнуть из ссылок к

28. O. W. Greenberg and A. Messiah, Are there Particles in Nature Other Than Bosons or Fermions? (будет опубликовано).

Систематическое изложение теории Хаага — Рюэля см. в книге, которая может быть рекомендована и для дальнейшего изучения,

29. R. Jost, General Theory of Quantized Fields, American Math. Soc. Publications, 1963. (Готовится русский перевод в изд. «Мир» в 1967 г.)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Р. Стритер, А. Вайтман

PCT, СПИН И СТАТИСТИКА И ВСЕ ТАКОЕ

Москва, 1966 г., 252 стр. с илл.

Редактор *В. Я. Дубнова*
Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*
Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 26/II 1966 г. Подписано в печать 3/VIII 1966 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 7,875.
Услов. печ. л. 13,23. Уч.-изд. л. 12,76.
Тираж 6000 экз.
Цена ~~1 р. 12 к.~~ Заказ № 681.
Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10.

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
24	5 сн.	ортохронная	ортохорная
24	7 сн.	ортохорная	ортохронная
30	16 сн.	$2\hat{x}^0 = 2x^0$	$2\utilde{\hat{x}}^0 = 2x^0$
33	4 св.	$x_{\dot{\alpha}\beta} = x_{\dot{\beta}\alpha}$	$x_{\alpha\dot{\beta}} = x_{\beta\dot{\alpha}}$
110	4 св.	$F_1(x_1, \ldots, x_n)$	$= F_1(x_1, \ldots, x_n)$
111	6 св.	F	$\hat{F}$
163	7 сн.	n — нечетное	0, n — нечетное
163	9 сн.	разбиения 0,	разбиения

Зак. 631

1 р. 12 к.

Р. СТРИТЕР, А. ВАЙТМАН

PCT, спин и статистика и всё такое